有限群表示论中的G-代数

黄文林 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

前　言

表示论是最朴素的线性研究方法。有限群表示论是关于有限群的线性投射的理论,它对单群分类的完成贡献巨大。发端于 20 世纪约 30 年代,由 Brauer 创立的有限群模表示论,标志着有限群表示论研究的一个新时代的到来,人们对它的研究糅合了模论、环论、代数表示论、同调方法等各种工具,而有限群模表示论则为这研究对象提供了珍贵的研究思路和方法,G-代数理论就是在这种背景下诞生的。

从 Green 的研究开始(文献[26]),许多建立在 G-代数上的研究结论不断被发现,例如,有限群的块论和群代数上的模论都可以统一到 G-代数中。Puig 引入内 G-代数的概念,并创立了点群形式下的局部分析方法,推广了关于 p-幂零群的判定条件和控制条件,并最终得到了幂零块和它的源代数的结构,有限群表示论中的局部表示论取得了辉煌的成就。

本书主要著述作者所提出的 G-代数的点上的相伴

关系、局部内 G-代数上的覆盖关系、广义膨胀 G-代数、G-代数上的广义 Brauer 构造函子等概念，以及它们在有限群表示论中的应用。

有限群表示论是现代数学前沿研究领域之一，本著作希望为有限群表示论中的 G-代数的研究起到一点抛砖引玉的作用。

作者

2016 年 1 月 16 日

目　　录

引言 ………………………………………………………… 1

第 1 章　*G*-代数研究背景………………………………… 11
1.1　*G*-代数基本知识 ………………………………… 11
1.2　有限群表示论简介 ………………………………… 19
1.3　*G*-代数的例子 …………………………………… 27

第 2 章　*G*-相伴关系和内 *G*-代数的中心
化子的块………………………………………… 32
2.1　研究思路和主要结论 …………………………… 32
2.2　*G*-相伴关系 ……………………………………… 37
2.3　内 *G*-代数的不动点子代数的中心
化子的块 ………………………………………… 45

第 3 章　局部内 *G*-代数上的覆盖关系 ……………… 61
3.1　研究背景介绍 …………………………………… 61

3.2　局部内 G-代数覆盖的定义 ………………… 64
3.3　本章的主要结论及其证明 ………………… 67

第 4 章　G-代数的广义膨胀 ……………………… 76
4.1　研究背景 ………………………………… 76
4.2　定义和主要结论 ………………………… 80
4.3　本章结论的证明 ………………………… 84

第 5 章　G-模和 G-代数上的广义 Brauer 构造函子 ……………………………… 93
5.1　研究背景和结论 ………………………… 93
5.2　G-模上的广义 Brauer 构造函子 …………… 99
5.3　G-代数上的广义 Brauer 构造函子……… 108

附录一　Brauer 的 43 个问题简述 ………………… 113

附录二　局部-整体猜想简介 …………………… 123

参考文献 ……………………………………… 130

引　言

自 20 世纪约 30 年代有限群的模表示论创立以来，关于它的研究就一直蓬勃发展，一方面在于它为研究群结构和群代数的结构提供了一种可行的线性方法，并且不断地取得研究成果，比如，群上的特征标理论对单群分类的巨大贡献；另一方面在于在模表示的发展过程中，人们对它的研究糅合了模论、环论、代数表示论、同调方法等各种工具，从而所得到的结论或多或少地可以联系到其他研究领域，也就为其他研究对象提供了源源不断的研究思路的方法.

在模表示论发展到第三阶段时，特征标理论、块理论、不可分解模理论、局部表示理论已经是该领域的研究基础比较成熟的分支，同时，这些理论在发展的过程中不断交叉和糅合，催生了不少新的研究观点，*G*-代数理论就是在这种背景下诞生的，从 Green 的文献[26]中的研究开始，许多建立在 *G*-代数上的结论不断被发现.

推广和统一群的相关结论以及群代数上的关于块

论和模论的结论，一直是 G- 代数的重要的研究思路和方法，通过这种方法，越来越多的关于群和群代数的重要结论被发现具有一般形式，由此人们发现这些结论也是代数的普遍的结论在群和群代数上的特殊表现. 本书正是在已有的研究结论的基础上，较好地在 G- 代数上实现了许多研究结论的一般化.

本书中，笔者的研究工作主要集中在第2、3、4、5章.

在第 2 章，我们首先设 A 是一个 H- 代数，B 是一个 G- 代数，并且 $f:A\to \mathrm{Res}_H^G B$ 是一个酉 H- 代数同态，这里

$$N_G(P)\leqslant H\leqslant G,$$

P 是 G 的一个 p- 子群. 我们研究：

$$A\xrightarrow{f}\mathrm{Res}_H^G B\xrightarrow{\text{Green correspondence for points}}B.$$

那么，对于 B^G 的在 G 中亏群为 P 的点 α，如果 $m_\alpha=1$，我们首先得到它在 $(\mathrm{Res}_H^G B)^H$ 中的 Green 对应点，它也是重数为1的，再通过 f，我们唯一地决定了 A^H 的一个重数为 1 的点，我们称 A^H 中的这个点为 α 的 H- 相伴点.

其次，我们设 A 是一个 G- 代数，B 是一个内 H- 代数，并且 $f:A\to \mathrm{Ind}_H^G B$ 是一个 G- 代数同态，这里 $N_G(P)\leqslant H\leqslant G$，$P$ 是 G 的一个 p- 子群. 我们研究：

$$A\xrightarrow{f}\mathrm{Ind}_H^G B\xrightarrow{\text{Green correspondence for points}}B.$$

那么，对于 B^H 的在 H 中亏群为 P 的点 β，如果 $m_\beta=1$，则由与上面类似的工作过程，我们唯一地决定了 β 的在 A^G

中的 G- 相伴点.

通过保持点的重数和比较相对应的点的亏群,我们刻画了上面的相伴关系,我们还证明了上述相伴关系满足块的 Brauer 对应,并用该相伴关系刻画了扩张 Green 对应.

我们发现,上述相伴关系可以合理地应用到内 G-代数 A 的 G- 不动点子代数的中心化子代数 $C_A(A^G)$ 上面,相应地得到了 $C_A(A^G)$ 的块上的相伴关系,从而我们的结论适当地推广了文献[9] 中的双自同态代数的点上的相伴关系,本章得到了下面的主要结论:

定理 2.1.1 (1) 设 A 是一个 H- 代数,B 是一个 G-代数.假定

$$f:A \to \mathrm{Res}_H^G B$$

是一个酉 H- 代数同态,那么对于 B^G 的每个在 G 中的亏群是 P 的点 α,如果 $m_\alpha = 1$,则 α 唯一地决定了 A^H 的一个点 $\mathrm{ass}_H(\alpha)$,并且

$$P \leqslant_H D(\mathrm{ass}_H(\alpha)),$$

$$m_{\mathrm{Br}_P^B(\alpha)}(\mathrm{Br}_P^B(f(\mathrm{ass}_H(\alpha)))) \geqslant 1,$$

$$m_{\mathrm{ass}_H}(\alpha) = 1.$$

(2) 设 A 是一个 G- 代数,B 是一个内 H- 代数.假定

$$f:A \to \mathrm{Ind}_H^G B$$

是一个酉 G- 代数同态,那么对于 B^H 的每个在 H 中的亏群是 P 的点 β,如果 $m_\beta = 1$,则 β 唯一地决定了 A^G 的一

个点 $\mathrm{ass}_G(\beta)$，并且

$$P \leqslant_G D(\mathrm{ass}_G(\beta)),$$

$$m_{\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G B}(1_G \otimes_{\mathcal{O}H} \beta \otimes_{\mathcal{O}H} 1_G)}(\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G B}(f(\mathrm{ass}_G(\beta)))) \geqslant 1,$$

$$m_{\mathrm{ass}_G(\beta)} = 1.$$

注 2.1.2　对应于文献[9]中的结论，我们称 $\mathrm{ass}_H(\alpha)$ 是 α 的 H-相伴点，并称 $\mathrm{ass}_G(\beta)$ 是 β 的 G-相伴点，显然，我们提出的相伴关系包含了重数为 1 的点上的 Green 对应关系，从而是 Green 对应关系的延伸.

定理 2.1.3　(1) 在定理 2.1.1(1) 中，假设 (A, ρ_A) 是一个内 H-代数，并且 (B, ρ_B) 是一个内 G-代数. 如果 α, $\mathrm{ass}_H(\alpha)$ 分别属于 G 的块 e' 和 H 的块 f'，那么 e' 和 f' 是 Brauer 对应下的块.

(2) 在定理 2.1.1(2) 中，假设 (A, ρ_A) 是一个内 G-代数. 如果 $\mathrm{ass}_G(\beta)$，β 分别属于 G 的块 e' 和 H 的块 f'，那么 e' 和 f' 是 Brauer 对应下的块.

定理 2.1.4　设 A 是一个局部内 G-代数，B 是一个局部内 H-代数，并且 B 是 A 的在文献[32]意义下的针对亏群 P 的扩张 Green 对应. 那么

(1) B 是 $\mathrm{ass}_H(1_A) \cdot A \cdot \mathrm{ass}_H(1_A)$ 的嵌入局部内 H-代数；

(2) A 是 $\mathrm{ass}_G(1_B)(\mathrm{Ind}_H^G B)\mathrm{ass}_G(1_B)$ 的嵌入局部内 G-代数.

定理 2.1.5　(1) 设 (A, ρ_A) 是一个内 G-代数，α 是

$C_A(A^G)$ 的亏群为 P 的块.那么存在 $C_{\mathrm{Res}_H^G A}((\mathrm{Res}_H^G A)^H)$ 的唯一的块 $\mathrm{ass}_H(\alpha)$ 使得

$$\mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(\mathrm{ass}_H(\alpha)\alpha) \neq 0, P \leqslant_H D(\mathrm{ass}_H(\alpha));$$

(2) 设(B,ρ_B)是一个内 H-代数,β 是 $C_B(B^H)$ 的一个亏群为 P 的块.那么存在 $C_{\mathrm{Ind}_H^G B}((\mathrm{Ind}_H^G B)^G)$ 的唯一的块 $\mathrm{ass}_G(\beta)$ 使得

$$\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\mathrm{ass}_G(\beta)\beta) \neq 0, P \leqslant_G D(\mathrm{ass}_G(\beta)).$$

定理 2.1.6 (A,ρ_A) 是一个内 G-代数,并且(B,ρ_B) 是一个内 H-代数.设 α,β 分别是 $C_A(A^G)$ 和 $C_B(B^H)$ 的块,并且它们有相同的亏群 P.

(1) 如果 $\alpha,\mathrm{ass}_H(\alpha)$ 分别属于 G,H 的块 e,f,那么 e 和 f 是 Brauer 对应下的块.

(2) 如果 $\mathrm{ass}_G(\beta),\beta$ 分别属于 G,H 的块 e,f,那么 e 和 f 是 Brauer 对应下的块.

定理 2.1.7 设 H_i 是 G_i 的子群,P_i 是 G_i 的 p-子群,并且

$$N_i := N_{G_i}(P_i) \leqslant H_i, \quad i = 1,2.$$

又设$(A_i,\rho A_i)$是一个有限秩 $\mathcal{O}$-自由的内 G_i-代数,α_i 是 $C_{A_i}(A_i^{G_i})$ 的块,并且(B_i,ρ_{B_i}) 是一个内 H_i-代数,β_i 是 $C_{B_i}(B_i^{H_i})$ 的块,$i = 1,2$.那么 $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ 和 $\beta_1 \otimes \beta_2$ 分别是 $C_{A_1\otimes A_2}((A_1 \otimes A_2)^{G_1\times G_2})$ 和 $C_{B_1\otimes B_2}((B_1 \otimes B_2)^{H_1\times H_2})$ 的块,而且我们有

(1) $\mathrm{ass}_{H_1\times H_2}(\alpha_1 \otimes \alpha_2) = \mathrm{ass}_{H_1}(\alpha_1) \otimes \mathrm{ass}_{H_2}(\alpha_2)$;

(2) $\mathrm{ass}_{G_1\times G_2}(\beta_1 \otimes \beta_2) = \mathrm{ass}_{G_1}(\beta_1) \otimes \mathrm{ass}_{G_2}(\beta_2)$.

在第 3 章,我们研究局部内 G- 代数上的覆盖关系.在文献[5]、[7]、[20]中对块覆盖和文献[6]中对模覆盖的研究基础上,我们提出了局部内 G- 代数上的覆盖关系,首先给出了下面的定义:

定义 3.2.1　设 $H \trianglelefteq G$,A 是一个局部内 G- 代数,C 是一个局部内 H- 代数;我们称局部内 G- 代数 A 覆盖局部内 H- 代数 C,如果 C 是 A 的嵌入内 H- 代数并且 $D(C) =_G H \cap D(A)$.

显然,该定义包含模覆盖的情形,并且我们发现当限定在块代数的情形下,上面的局部内 G- 代数上的覆盖关系不弱于文献[5]、[7]、[20]中块覆盖的概念,同时该定义也符合它的群论痛景.

但同时,我们得到了与块覆盖一致的一个结论:

推论 3.2.7　设 B 是 G 的块,b 是 H 的块,这里 $H \trianglelefteq G$;那么在定义 3.2.1 的意义下,如果 B 覆盖 b,那么 B 恰好覆盖 b 的全部 G- 共轭.

我们得到下面的两个结论,它们说明我们的定义是合理的:

定理 3.3.3　设 A 是局部内 G- 代数,并且 C 是 A 的嵌入局部内 H- 代数,这里 $D(A) \leqslant K \leqslant H \leqslant G$,以及 $K \trianglelefteq G$;那么 $D(A) =_G D(C)$.特别地,如果 $D(A) \leqslant H \trianglelefteq G$,

那么 A 覆盖它的每个嵌入局部内 H- 代数.

定理 3.3.4 设 C 是一个亏群为 D 的局部内 H- 代数,这里 D 是 G 的正规子群,如果 $H \trianglelefteq G$,那么 D 也是 $\mathrm{Ind}_H^G C$ 的每个嵌入局部内 G- 代数 A 的亏群,由此 A 覆盖 C.

然后借用扩张 Green 对应,将文献[30]中的块覆盖和文献[6]中的模覆盖的结论推广到局部内 G- 代数上去,得到了局部内 G- 代数上的覆盖关系与扩张 Green 对应之间的一种相容性,结论如下:

定理 3.3.6 扩张 Green 对应提供了一个覆盖 A 的局部内 G- 代数同构类和覆盖 C 的局部内 L- 代数同构类之间的一一对应.

在第 4 章,我们研究 G- 代数上的膨胀方法,在文献[46]、[39]、[50]、[53]、[54]关于模和 G- 代数的膨胀的研究的基础上,我们提出了 G- 代数上的广义膨胀的概念,推广了关于模和 G- 代数的膨胀的相应的结论.

在这一章,我们首先得到了下面的广义膨胀 G- 代数是局部 G- 代数的充要条件:

定理 4.2.1 设 A 是一个 G- 代数,并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部 N- 代数,那么 G/N- 代数 C 的广义膨胀 G- 代数 $A \otimes_k \inf(C)$ 是一个局部 G- 代数当且仅当 C 是一个局部 G/N- 代数.

这个结论推广了下面的事实:

(1) G/N- 代数 C 是局部 G/N- 代数当且仅当 C 的膨胀 G- 代数 $\inf(C)$ 是局部 G- 代数.

(2) $A\otimes_k C$ 是一个局部代数当且仅当 A 和 C 都是局部代数.

再应用块和局部内 G- 代数之间的属于关系, 我们得到下面的关于广义膨胀 G- 代数与块覆盖的关系:

性质 4.2.2　设 A 是一个内 G- 代数并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个属于 N 的块 b 的局部内 N- 代数, 又设 C 是一个局部内 G/N- 代数. 如果广义膨胀内 G- 代数 $A\otimes_k\inf(C)$ 属于 G 的块 B, 那么 B 覆盖 b.

以及下面的关于广义膨胀 G- 代数与块控制的结论:

推论 4.2.3　设 C 是一个属于 G/N 的块 $b=(k(G/N)e_b)$ 的局部内 G/N- 代数, 并且膨胀内 G- 代数 $\inf(C)$ 属于 G 的块 $B(=kGe_B)$. 那么 B 覆盖 N 的主块并且控制 b, 特别地, G 的主块覆盖 N 的主块并且控制 G/N 的主块.

定理 4.2.4　设 A 是属于 G 的块 B 的内 G- 代数, 并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部内 N- 代数. 那么存在平凡内 N- 代数 k 的诱导内 G- 代数 $\mathrm{Ind}_N^G k$ 作为 G/N- 代数的某个嵌入局部内 G/N- 代数 C 的广义膨胀内 G- 代数 $A\otimes_k\inf(C)$ 属于 B.

定理 4.2.4 推广了事实: G 的主块总是控制 G/N 的

某个块,以及总存在平凡 kN- 模 k 的诱导 kG- 模的某个不可分解直因子属于 G 的主块.换句话说,G 的主块总是覆盖 N 的主块.

我们还得到了下面的刻画广义膨胀 G- 代数的亏群的定理 4.2.5,推广了事实:如果 D 是膨胀局部 G- 代数 $\mathrm{inf}(C)$ 的一个亏群,那么 DN/N 是局部 G/N- 代数 C 的一个亏群.由此定理 4.2.5 给出了文献[48](Theorem 2.6.2)的一个广义的反方向的结论:

定理 4.2.5　设 A 是一个 G- 代数,并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部 N- 代数,又设 C 是一个局部 G/N- 代数,如果 D 是广义膨胀 G- 代数 $A \otimes_k \mathrm{inf}(C)$ 的一个亏群,那么 DN/N 是 C 的一个亏群.

推论 4.2.6　设 A 是一个 G- 代数,D 是 A 的一个亏群,并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部 N- 代数,那么 DN/N 是 G/N 的一个 Sylow p- 子群.

最后,在第 5 章,我们研究 G- 模和 G- 代数上的广义 Brauer 构造函子.广义 Brauer 构造函子的研究 p-monomial 模和 monomial Dade 代数时十分有用.在文献[4]、[11]、[12]、[28]、[64]研究 Brauer 构造(函子)的(内、外)张量积的基础上,我们进一步讨论 G- 模和 G- 代数上的广义 Brauer 构造函子的张量积,本章的主要结论证实了 G- 模和 G- 代数上的广义 Brauer 构造函子分别与 G- 模和 G- 代数的(外)张量积相容.结论如下:

定理 5.1.1　V_i 是一个 G_i- 模，$H_i \leqslant G_i$，(H_i, ψ_i) 属于 $M_r(H_i)$，$i = 1, 2$. 那么我们有下面的 $kN_{G_1 \times G_2}(H_1 \times H_2, \psi_1 \times \psi_2)$- 模同构：

$$V_1(H_1, \psi_1) \otimes_k V_1(H_2, \psi_2) \cong (V_1 \otimes_k V_2)(H_1 \times H_2, \psi_1 \times \psi_2),$$

以及 Brauer 态射的等同：

$$\mathrm{Br}^{V_1}_{(H_1, \psi_1)} \otimes_k \mathrm{Br}^{V_2}_{(H_2, \psi_2)} = \mathrm{Br}^{V_1 \otimes_k V_2}_{(H_1 \times H_2, \psi_1 \times \psi_2)}.$$

定理 5.1.2　A_i 是一个 G_i- 代数，$H_i \leqslant G_i$，$\hat{H}_i$ 是 $\mathrm{Hom}(G_i, \mathcal{O}^*)$ 的一个 $N_{G_i}(H_i)$- 子群，$i = 1, 2$. 那么下面是一个 $(N_{G_1 \times G_2}(H_1 \times H_2)/(H_1 \times H_2))$- 代数同构：

$$A_1(\hat{H}_1) \otimes_k A_2(\hat{H}_2) \cong (A_1 \otimes_k A_2)(\hat{H}_1 \times \hat{H}_2),$$

以及 Brauer 态射的等同：

$$\mathrm{Br}^{A_1}_{\hat{H}_1} \otimes_k \mathrm{Br}^{A_2}_{\hat{H}_2} = \mathrm{Br}^{A_1 \otimes_k A_2}_{(\hat{H}_1 \times \hat{H}_2)}.$$

定理 5.1.1 提供了 G- 模上的广义 Brauer 构造函子的张量积的一种新的情形，定理 5.1.2 推广了文献 [4] (Theorem 2.6).

第1章　G-代数研究背景

1.1　G-代数基本知识

Green发现可以用G-代数的方式统一处理有限群的块论和群代数上的模论，从而，块论和Green的不可分解模理论的许多问题得到了统一形式.后来Puig发现了一类特殊的G-代数——内G-代数，每个内G-代数以一个典范的方式作成一个G-代数，他在内G-代数上引入了许多新的不变量、并成功地在G-代数上创立了点群形式下的局部分析方法，从而对许多经典结论给出了新的观点，并且适当地推广了关于p-幂零群的判定条件和控制条件，并最终得到了幂零块和它的源代数的结构.内G-代数的重要性一方面在于，一些重要的G-代数都是内G-代数，另一方面在于，模上的诱导方法可以应用到内G-代数上却不能适当地应用到G-代数上，从而限制和诱导的对偶关系可以恰当地在内G-代数上体现

出来，由此适合在它上面做局部分析.

在本书中，我们总假定群 G 是有限群，$\mathcal{O}$ 代表一个 p-进完备离散赋值环，它有唯一的极大理想 (π) 和特征为素数 p 的剩余类域 $k=\mathcal{O}/(\pi)$，我们总是不排除 $\mathcal{O}=k$ 以及 $(\pi)=0$ 的情形. 在某些情况下，我们要求域 k 是代数封闭的或 $\mathcal{O}=k$. 在我们的叙述和结论对 $\mathcal{O}$ 或 k 有进一步的要求时，我们都会申明的.

我们总是按习惯简称一个 $\mathcal{O}$-代数 A 为代数 A，并假定它是含幺的结合代数，同时是一个有限生成 $\mathcal{O}$-模. a 和 b 是 $\mathcal{O}$-代数 A 的两个元素，如果 $ab=1$，那么容易推得 $ba=1$，此时，我们称 a 和 b 是 A 的单位. 特别地，A 的单位元 1_A 是 A 的一个单位. 由此，A 的全体单位按 A 的乘法作成一个乘法群，记为 $U(A)$ 或 A^*.

如果 $e=e^2$，代数 A 的元素 e 称为它的一个幂等元. 如果 $ef=0$，A 的幂等元 e 和 f 称为相互正交的幂等元. 一个非零幂等元称为本原幂等元，如果它不能分解为两个相互正交的幂等元之和.

幂等元 e 在代数 A 中的一个正交分解是指一个包含 A 的两两正交的幂等元的有限集合 I，它使得 $e=\sum_{i\in I} i$. 这个分解也称为本原正交的，如果集合 I 中的每个幂等元都是本原的.

代数 A 的一个点 α 指的是如下形式的一个集合：

$$\alpha=\{{}^{a}i=aia^{-1}\mid i$$

是 A 的一个本原幂等元，a 跑遍 $U(A)\}$，

也即是与 i 相互共轭的全体本原幂等元的集合. 一般地，我们记 A 的全体点的集合为 $P(A)$，那么 $\alpha \in P(A)$. 很显然，我们用 $P(A)$ 划分了 A 的全部的本原幂等元集合. 我们注明，G- 代数 A 只有有限个点.

设

$$1_1 = \sum_{\alpha \in P(A)} \sum_{e_{ik} \in \alpha} e_{ik}$$

是 1_1 在代数 A 中的一个本原正交分解，我们将此分解中属于点 α_i 的本原幂等元个数称为 α_i 在 A 中的重数，记为 m_α. 我们知道，由于 1_1 在代数 A 中的任意两个本原正交分解是相差一个 a 共轭的，$a \in U(A)$，那么 m_α 是不依赖于 1_1 在代数 A 中的本原正交分解的选取的.

幺环 A 的 Jacoboson 根，记为 $J(A)$，是指环 A 的全部的极大左理想的交，它也等于 A 的全部的极大右理想的交，从而它是 A 的一个理想. 在 A 是 G- 代数的情况下，$J(A)$ 恰是 A 的全部的极大理想的交（文献[44]Lemma 10.2），而且 A 只有有限个极大理想.

对于代数 A 的每个点 α，总存在 A 的唯一的极大理想 M_α，使得 $\alpha \in M_\alpha$. 由此我们得到一个单代数 $S(\alpha) = A/M_\alpha$，以及下面的关于 A 的半单商的代数同构式：

$$A/J(A) \cong \prod_{\alpha \in P(A)} A/M_\alpha.$$

那么容易知道

$$m_\alpha^2 = \dim_k(S(\alpha)),$$

我们称 $S(\alpha)$ 是 α 的重数代数.

设 i 和 j 是 A 的非零幂等元. 如果它们在 A 中共轭, 则它们在 A 中的任意两个本原正交分解相差一个 $U(A)$- 共轭. 由此, 它们的本原正交分解含有点 $\alpha \in P(A)$ 中的本原幂等元的个数是相同的. 我们记为 $m_\alpha(i) = m_\alpha(j)$, 并称它为点 α 在 i 和 j 中的重数.

$\mathcal{O}$ 上的 G- 代数 A 是一个对 (A,ψ), 其中 A 是一个 $\mathcal{O}$- 代数, $\psi: G \to \mathrm{Aut}(A)$ 是一个群同态. 这里 $\mathrm{Aut}(A)$ 指的是 A 的 $\mathcal{O}$- 代数自同构群. 有时在没有混淆的情况下, 我们也简单地用 A 来表示这个 G- 代数. 显然, 对于每个 G- 代数 A, G 在 A 上都有一个典范的群作用.

一个内 G- 代数是一个对 (A,φ), 这里 A 同样是一个 $\mathcal{O}$- 代数, φ 是从群 G 到 A 的单位群 A^* 的群同态. 由该群同态 φ 我们典范地得到一个从 G 到 $\mathrm{Aut}(A)$ 的群同态 $\psi: g \longmapsto \mathrm{Inn}(\varphi(g))$, 由此诱导得到一个 G- 代数 A.

如果 A 是一个 (内) G- 代数, 那么 A^{op} 也是一个 (内) G- 代数. 每个内 G- 代数都可以典范地被看做是一个 G- 代数. 同一个 $\mathcal{O}$- 代数 A 上的两个内 G- 代数诱导出同一个 G- 代数, 当且仅当这两个内 G- 代数相差一个从群 G 到 A 的中心的群同态. 由于交换的内 G- 代数总是诱导出平凡的 G- 代数, 所以不是每个 G- 代数都能被看成是一个内 G- 代数.

一般地,通过限制的方法,我们可以从 G-代数(A,ψ_A)得到一个 H-代数$(\mathrm{Res}_H^G A,\psi_{\mathrm{Res}_H^G A})$,我们称它为 G-代数(A,ψ_A)的限制 H-代数,这里 $H\leqslant G$ 以及 $\psi_{\mathrm{Res}_H^G A}$ 是 ψ_A 在 H 上的限制.当然,内 G-代数的限制 H-代数是一个内 H-代数.

对偶地,我们介绍下面的关于内 G-代数的诱导方法,它来源于文献[61].

设 $H\leqslant G$ 并且(B,ρ_B)是一个内 H-代数,B 的诱导内 G-代数$(\mathrm{Ind}_H^G B,\rho_{\mathrm{Ind}_H^G B})$被定义为一个有下面的分配形式的乘法的

$$\mathcal{K}\text{-代数 } \mathcal{K}G\otimes_{\mathcal{K}H}B\otimes_{\mathcal{K}H}\mathcal{K}G,$$

以及 $\mathcal{K}$-代数同态:

分配形式的乘法:

$$(x\otimes_{\mathcal{K}H}b\otimes_{\mathcal{K}H}y)(x'\otimes_{\mathcal{K}H}b'\otimes_{\mathcal{K}H}y')$$
$$=\begin{cases}0, & yx'\in H,\\ x\otimes_{\mathcal{K}H}b\cdot yx'\cdot b'\otimes_{\mathcal{K}H}y', & yx'\in H,\end{cases}$$

这里,$x,y,x',y'\in G/H;b,b'\in B$.

$\mathcal{K}$-代数同态(结构同态):

$$\mathcal{K}G\to\mathcal{K}G\otimes_{\mathcal{K}H}B\otimes_{\mathcal{K}H}\mathcal{K}G,g\to\sum_{t\in G/H}gt\otimes_{\mathcal{K}H}1_B\otimes_{\mathcal{K}H}t^{-1}.$$

在本书中,除非我们指明 $\mathcal{K}$-代数 A 到 $\mathcal{K}$-代数 B 的一个代数同态 f 是酉同态,也即保持单位元,否则,f 并不一定将 1_A 映成 1_B.

设 A 和 B 都是 G- 代数，$\mathcal{O}$- 代数同态 $f: A \to B$ 称为一个 G- 代数同态，如果它和 G 在 A 上的作用相交换，也即

$$f({}^{g}a) = {}^{g}f(a), g \in G, a \in A.$$

特别地，在上述 A 和 B 都是内 G- 代数的情况下，我们称 f 为一个内 G- 代数同态，如果

$$f(g \cdot a) = g \cdot f(a), f(a \cdot g) = f(a) \cdot g, g \in G, a \in A.$$

显然，每个从 (A, ψ_A) 到 (B, ψ_B) 的 G- 代数同构 f 都是酉的，它使得 $\psi_B = f \cdot \psi_A$。进一步，我们称 (A, ψ_A) 是 (B, ψ_B) 的一个嵌入 G- 代数，如果存在 B^G 的一个幂等元 i，使得 $(A, \psi_A) \cong (iBi, \psi_{iBi})$，这里 $\psi_{iBi}(g) = \psi_B(g)$。

H 是 G 的一个子群，A 是一个 G- 代数，A 的全体 H- 不动点元素的集合，记为 A^H，指的是如下集合：

$$A^H = \{a \in A \mid {}^{g}a = a, 任意的 g \in G\}.$$

显然，A^H 是 A 的一个幺子代数，并且 ${}^{g}(A^H) = A^{gH}$，$g \in G$，由此 A 典范地作成了一个 $N_G(H)$- 代数. 如果 A^G 是一个局部代数，我们称代数 A 是局部 G- 代数.

一般地，对于一个局部 H- 代数 C，$H \leqslant G$，我们称它为 B 的一个嵌入局部 H- 代数，如果作为 H- 代数

$$C \cong i(\mathrm{Res}_H^G B)i.$$

这里，i 是 B^H 的一个本原幂等元.

H 和 K 是 G 的子群，并且 $K \leqslant H$，那么 $A^H \subseteq A^K$，由此我们有下面的相对迹映射：

$$\mathrm{Tr}_K^H: A^K \to A^H, a \mapsto \sum_{h \in H/K} {}^{h}a, a \in A^K.$$

容易知道上面的迹映射是不依赖于 K 在 H 中的陪集的选取的，而且 $A_K^H=\mathrm{Tr}_K^H(A^K)$ 是 A^H 的一个理想.

关于迹映射，下面的 Mackey 分解公式(文献[66])十分重要.

Mackey 分解公式 设 A 是一个 G-代数，$H,K\leqslant G$ 并且 $a\in A^K$，那么

$$\mathrm{Tr}_K^G(a)=\sum_{g\in H\backslash G/K}\mathrm{Tr}_{H\cap {}^gK}^H({}^g a).$$

由于

$$\sum_{K<H}A_K^H+J(\mathcal{O})A^H$$

是 A^H 的一个理想，我们定义下面的 Brauer 商：

$$A(H)=A^H/\Big(\sum_{K<H}A_K^H+J(\mathcal{O})A^H\Big)\cong k\otimes_{\mathcal{O}}\Big(A^H/\sum_{K<H}A_K^H\Big).$$

显然，$A(H)$ 典范地作成一个 $N_G(H)$-代数. 我们注意到，当 H 不是 p-子群时，$A(H)=0$. 由此我们给出下面的关于 p-子群 P 的 Brauer 同态：

$$\mathrm{Br}_P^A:A^P\to A(P).$$

该 Brauer 同态是一个 $\mathcal{O}N_G(P)/P$-代数同态.

设 H 是 G 的一个子群，A 是一个 G-代数. 对于 A^H 的一个点 α，我们也称 H_α 是 G-代数 A 上的一个点群，那么集合

$$\{P\leqslant H\mid \alpha\subseteq A_P^H\}$$

的极小元存在，并且是 H 的相互共轭的 p-子群，我们称它们中的任一个是点 α(在群 H 中)的亏群，记为

$D(\alpha)$,或称为点群 H_α 的亏群,记为 $D(H_\alpha)$.

对于 G-代数 A 的点群 H_α 的亏群与Brauer同态的关系,我们有下面的经典结论(文献[66]):

设 A 是一个 G-代数,H_α 是 G-代数 A 上的一个点群,P 是 H 的一个 p-子群.那么 P 是点 α 的亏群当且仅当 P 是使得 $\mathrm{Br}_P^A(\alpha) \neq 0$ 的 H 的极大 p-子群.

请注意,这个结论并不能借助模上的Brauer构造函子类比到 $\mathcal{O}G$-模上去(文献[66],Exercise 27.2).

对于代数 A 以及它的两个含在 A^G 中的幂等元 i 和 i',如果 i 和 i' 在 A^G 中共轭,那么 iAi 和 $i'Ai'$ 是同构的 G-代数;反之,虽然 iAi 和 $i'Ai'$ 是同构的 G-代数,但 i 和 i' 在 A^G 中并不一定共轭.

对于局部 G-代数 A(在文献[66]中,它也被称为本原 G-代数),我们定义 G 的使得 $1_A \in A_H^G$ 的极小子群 H 为 A 的亏群,记为 $D(A)$,它们是两两共轭的 p-子群.特别地,群代数的每个块代数 B 都是一个局部内 G-代数,因此有亏群 $D(B)$.

设 A 是一个 G-代数,H_α 是 A 上的一个点群,G-代数关于点群 H_α 的局部化指的是一个 H-代数,记为 A_α,和一个 H-代数嵌入:

$$f:A_\alpha \to \mathrm{Res}_H^G A,$$

使得 $f(1_{A_\alpha}) \in \alpha$.那么在 H-代数同构的意义下,$A_\alpha = iAi$,$i \in \alpha$.

1.2 有限群表示论简介

设 G 是一个有限群，群 G 在交换幺环 R 上的一个表示是指由 R- 模 V 和群同态 ρ 提供的一个对 (V,ρ)，这里 $\rho:G\to \mathrm{Aut}(V)$，$\mathrm{Aut}(V)$ 指的是 R- 模 V 上的全体自同构按同态合成法则作成的乘法群，我们也称 ρ 为群 G 的一个 R- 表示. 显然，表示 ρ 给 R- 模 V 典范地提供了一个群作用，那么 R- 模 V 自然地作成了一个 RG- 模 V. 事实上群 G 上的 R- 表示和 RG- 模是一一对应的（文献[45]）.

如果 R- 模 V 是一个有限秩 n 的自由 R- 模，那么对于任何选定的 V 的一组基，我们可以将 $\mathrm{Aut}(V)$ 和环 R 上的全体 n 级可逆矩阵作成的乘群 $GL_n(R)$ 等同，由此我们得到群 G 在交换幺环 R 上的一个矩阵表示

$$\rho^*:G\to GL_n(R),$$

我们称它为群 G 的对应于表示 ρ 的矩阵表示.

群 G 的特征标是指由群 G 的某个矩阵表示的迹函数提供的一个从群 G 到 R 的群同态，显然，每个群元素的特征标值都是一个代数数（文献[65]）. 与前面的叙说一样，群代数的块是指群代数的全体中心本原幂等元，它的块代数即是对应的全体不可分解双边理想. 我们称一个不可分解 RG- 模 V 属于群 G 的某个块 e，如果 e 平凡地作用在 V 上，从而我们可以将不可分解模的全体

划分成块.对应地,全体不可约模被划分成块.在 R 是完备离散赋值环或域的情况下,全体的不可约模的特征标也被划分成块,我们称它们为群 G 的特征标块.

讨论有限群的表示理论,目的在于以一种线性的方式来探索群的结构,以及用群代数的表示范畴来刻画对应的群代数的性质.目前这两方面都取得了优秀的成果,但都存在不少的难题.在上述群表示的朴素的思想指导下,各种新的研究工具逐渐被发现.

当交换幺环 R 是特征为 0 的域或者是特征为不整除群 G 的阶的素数的域时,群代数 RG 是一个域上的半单代数,它的表示范畴是半单的,相对较为简单,此时我们称这种情形下的群表示为有限群的常表示论,常表示理论发展至今已有 100 多年的历史.当域 R 的特征为整除群的阶的素数时,Maschkle 定理失效(Green 提出相对投射的概念来弥补这一点),群代数 RG 不再是域上的半单代数,它的表示范畴是非半单的,从而它的表示论性质较为复杂,对于这种情形下的表示论,我们习惯上称为模表示论,它是由群论大师 Brauer 在 20 世纪约 30 年代开创的.

群的表示理论自创立以来,就一直处于蓬勃发展的过程中,并且日渐从最初作为为单群分类服务的一个工具发展成为一个相对独立的研究群代数的结构以及表示范畴的学科.它不仅自身内容丰富,而且还在其他学

科获得了广泛的应用.目前,群表示论已经成为理论物理学家必须的研究基础.

群表示论的研究有许多分支,比较典型的有特征标理论、块理论、不可分解模理论、局部表示理论.其中,常特征标理论和模特征标理论在有限单群分类过程中的贡献,特征标块和关于群代数的块代数的 Brauer 第一、二、三主要定理,Green 对应定理,Puig 和 Broue 关于幂零块和它的源代数的结构的刻画等,均是这些领域的标志性成果.

同时,这些理论在发展的过程中不断交叉、糅合,催生了不少新的研究观点,G-代数理论就是在这种背景下诞生的,从 Green 的文献[26]中的研究开始,许多建立在 G-代数上的结论不断被发现.

推广和统一群的相关结论和群代数上的关于块论和模论的结论,一直是 G-代数的重要的研究思路和方法,通过这种方法,越来越多的关于群和群代数的重要结论被发现具有一般形式,由此人们发现这些结论也是代数的普遍的结论在群和群代数上的特殊表现.

下面关于 G-代数的重要结论(1) ~ (7)就是将有限群的 Sylow 定理推广到 G-代数上而得到的(文献[51],[60]),正是以这些结论为基础,Puig 建立了点群形式下的局部分析方法.

(1) 设 Q_δ 是 G-代数 A 上的局部点群,$Q \leqslant H \leqslant G$.

那么

$$\mathrm{Br}_\delta(A_Q^H) = A(Q_\delta)_1^{N_H(Q_\delta)/Q},$$

并且

$$\mathrm{Br}_\delta(\mathrm{Tr}_Q^H(a)) = \mathrm{Tr}_1^{N_H(Q_\delta)/Q}(\mathrm{Br}_\delta(a)),\quad a \in A^Q\delta A^Q.$$

(2) 设 H_β 和 K_γ 是 G-代数 A 上的点群，并且 $K \leqslant H$ 以及

$$A^H\beta A^H \subseteq \mathrm{Tr}_K^H(A^K\gamma A^K);$$

又设 R_ϵ 是 H_β 的局部点子群.那么存在某个元素 $h \in H$，使得

$$R_\epsilon \leqslant {}^h(K_\gamma).$$

(3) 设 H_β 是 G-代数 A 上的点群，那么存在 H_β 的某个局部点群 S_ζ，使得

$$A^H\beta A^H \subseteq \mathrm{Tr}_S^H(A^S\zeta A^S).$$

(4) 设 H_β 和 P_γ 是 G-代数 A 上的点群，那么下面的论断是等价：

①P_γ 是 H_β 的亏点群；②P_γ 是集合

$\{K_\delta$ 是 A 上的点群 $\mid K \subseteq H, A^H\beta A^H \subseteq \mathrm{Tr}_K^H(A^K\delta A^K)\}$

的极小元；③P_γ 是 H_β 的极大局部点子群.

(5) 设 H_β 是 G-代数 A 上的点群，并设 P_γ 和 P'_{γ} 是 H_β 的极大局部点子群.那么存在元素 $h \in H$，使得

$$P'_{\gamma'} = {}^h(P_\gamma).$$

(6) Burry-Carlson-Puig 定理(参见引理 3.3.5).

(7) P_γ 和 R_ϵ 是 G-代数 A 上的局部点子群并且 $R_\epsilon \leqslant$

P_γ.那么存在 A 上的局部点群 Q_δ,使得

$$R_\epsilon \leqslant Q_\delta \leqslant P_\gamma,$$

并且

$$Q \leqslant N_P(R_\epsilon).$$

事实上,在上面的结论中,取定 G- 代数是代数封闭域 k,那么就对应地得到下面的 Sylow 定理:

(1) 设 $Q \leqslant H \leqslant G$;其中 Q 是的 G 一个 p- 子群.那么

$$|H:Q| \equiv |N_G(Q):Q| \pmod p.$$

(2) 设 $K \leqslant H \leqslant G$,并且 $p \nmid |H:K|$.那么对于 H 的任一 p- 子群 R,存在 $h \in H$,使得 $R \leqslant {}^hK$.

(3) 有限群 H 的 Sylow p- 子群的定义.

(4) 有限群 H 的极大 p- 子群恰是 H 的 p'- 指数的极小子群.

(5) 有限群 H 的 Sylow p- 子群是相互 H- 共轭的.

(6) 设 $K \leqslant H$,Q 是 K 的一个 Sylow p- 子群.如果 $N_H(Q) \leqslant K$,那么 Q 也是 H 的一个 Sylow p- 子群.

(7) 有限 p- 群的真子群真包含于它的正规化子.

下面的结论(文献[9],Theorem 3.2)在文献[48](Theorem 1.12.3)中也被称为 G- 代数上的 Brauer 第一主要定理:

设 A 是一个 G- 代数,P 是 G 的一个 p- 子群.那么 Brauer 同态 Br_P^A 限制到 A_P^G 上是一个从 A_P^G 到 $A(P)_P^{N_G(P)}$ 的满同态,而且这个满同态诱导了 A^G 的在 G 中亏群为 P

的点和 $A(P)^{N_G(P)}$ 的在 $N_G(P)$ 中亏群为 P 的点之间的一一对应，同时该满同态保持相对应的点的重数.

证明： 设 α 和 β 是相对应的点，在文献[48] (Theorem 1.12.3) 的证明基础上，我们知道 $\mathrm{Br}_P^A(A_P^G) = A(P)_1^{N_G(P)}$，以及

$$A(P)_1^{N_G(P)} + M_\beta = A(P)^{N_G(P)},$$

那么

$$A^G/M_\alpha \cong A(P)^{N_G(P)}/M_\beta,$$

即 $m_\alpha = m_\beta$.

下面的结论也被专家称为 G- 代数的点上的 Green 对应.它是上面的 G- 代数上的 Brauer 第一主要定理的一个显然的推论.

设 A 是一个 G- 代数，P 是 G 的一个 p- 子群，H 是 G 的子群.如果 $N:=N_G(P)\leqslant H$，那么存在一个 A^G 的在 G 中亏群为 P 的点和 A^H 的在 H 中亏群为 P 的点之间的一一对应，而且，如果点 $\alpha\in A^G$ 和点 $\beta\in A^H$ 是该对应关系下的对应点，那么 $\mathrm{Br}_P^A(\alpha)=\mathrm{Br}_P^A(\beta)$ 是 $A(P)^N$ 的一个点，并且 $m_\alpha = m_\beta$.

在文献[32] 中，借用内 G- 代数上的限制和诱导方法，推广经典的 Green 对应定理，我们得到下面的扩张 Green 对应定理，它给出了有相同的亏群 D 的局限内 H- 代数和局部内 G- 代数之间的一个自然的对应，这里 $N_G(D)\leqslant H\leqslant G$.扩张 Green 对应建立了亏群为 D 局限

内 G-代数同构类和亏群为 D 局部内 H-代数同构类之间的一一对应关系，由此适当推广了模上的 Green 对应关系. 事实上，扩张 Green 对应是上述 G-代数的点上的 Green 对应限定在重数为 1 的点的情形下的一个极好的应用.

扩张 Green 对应定理 设 D 是 G 的 p-子群，$N_G(D) \leqslant H \leqslant G$. 记

$$\mathscr{X} = \{P \leqslant G \mid P \leqslant D^g \cap D, g \in G/H\},$$

$$\mathscr{Y} = \{P \leqslant G \mid P \leqslant D^g \cap H, g \in G/H\},$$

以及

$\mathscr{S}_1 = \{A \mid A$ 是一个在群 G 中亏群为 D 的局部内 G-代数$\}$；

$\mathscr{S}_2 = \{B \mid B$ 是一个在群 H 中亏群为 D 的局部内 H-代数$\}$.

那么存在集合 $\mathscr{S}_1$ 和集合 $\mathscr{S}_2$ 之间的一一对应，该一一对应可刻画如下：

(1) 对于任意的 $A \in \mathscr{S}_1$，设

$$1_A = \sum_{j \in J} j$$

是 1_A 在 A^H 中的本原幂等元分解，那么存在唯一的 $f(A) \in \mathscr{S}_2$ 使得

$$f(A) \backsimeq A_\delta = j_0 A j_0,$$

对于某个 $j_0 \in J$，这里 $\delta \in P_H(A)$，使得 $j_0 \in \delta$，并且对于另一个 $j \in J$，A_β 的亏群都属于 $\mathscr{Y}$，这里 $\beta \in P_H(A)$ 使得

$j \in \beta$;

(2) 对于任意的 $B \in \mathscr{S}_2$,设

$$1_{\mathrm{Ind}_H^G B} = \sum_{i \in I} i$$

是 $1_{\mathrm{Ind}_H^G B}$ 在 $(\mathrm{Ind}_H^G B)^G$ 中的本原幂等元分解,那么存在唯一的 $g(B) \in \mathscr{S}_1$,使得

$$g(B) \trianglerighteq (\mathrm{Ind}_H^G B)_\alpha = i_0(\mathrm{Ind}_H^G B)_{i_0},$$

对于某个 $i_0 \in I$,这里 $\alpha \in P_G(\mathrm{Ind}_H^G B)$,使得 $i_0 \in \alpha$,并且对于另一个 $i \in I$,$(\mathrm{Ind}_H^G B)_\alpha$ 有一个亏群在 $\mathscr{X}$ 中,这里 $\alpha \in P_G(\mathrm{Ind}_H^G B)$,使得 $i \in \alpha$;

(3) 特别地,分别作为内 G- 代数和内 H- 代数,我们有下面的同构:

$$g(f(A)) \cong A, f(g(B)) \cong B.$$

推论　设 D 是 G 的 p- 子群,$N_G(D) \leqslant H \leqslant G$,$A$ 和 C 分别是属于 G 的块 B 的局部内 G- 代数和属于 H 的块 b 的局部内 H- 代数,并且 A 是 C 的关于公共亏群 D 的扩张 Green 对应,那么 B 和 b 是 Brauer 对应下的块(代数).

证明:在 H- 代数同构的意义下,设 $C \cong iAi$,这里 i 是 A 在群 G 中亏群为 D 的一个本原幂等元,那么 $\mathrm{Br}_D^A(i) \neq 0$,并且

$$\rho_C(e_b) = i = \rho_A(e_b)i, \rho_A(e_B) = 1_A.$$

由此,

$$\mathrm{Br}_D^A(i) = \mathrm{Br}_D^A(\rho_A(e_b)\rho_A(e_B)i) \neq 0, \mathrm{Br}_D^{\mathcal{O}G}(e_b e_B) \neq 0.$$

那么,

$$\overline{e_b}\mathrm{Br}_D^{kG}(\overline{e_B}) \neq 0,$$

B 和 b 是 Brauer 对应下的块代数.

1.3 G-代数的例子

1.3.1 群代数 $\mathcal{O}G$

$\mathcal{O}G$ 作为以 G 为一组基的自由 $\mathcal{O}$-模,以线性扩张群 G 的乘法作成了一个 $\mathcal{O}$-代数,那么按典范包含群同态 $G \to (\mathcal{O}G)^*$ 作成一个内G-代数. $\mathcal{O}G$ 的每个块代数是局部内 G-代数.

1.3.2 $\mathcal{O}G$-模

M 是一个 $\mathcal{O}G$-模,也即它是群 G 的一个表示,它的自同态环 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ 按下面的方式作成一个内 G-代数:

$$G \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M), g \mapsto g \cdot 1_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)}.$$

容易知道,作为内 G-代数

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)^{op} \cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M^*),$$

这里

$$M^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O}).$$

需要说明的是,并不是每个内 G-代数都可以来源于 G 的某个表示的自同态环按这种方式作成的内 G-代

数,以及对于两个 Γ-自由 ΓG-模,它们的自同态环按上述方式作成的内 G-代数同构的,当且仅当这两个 Γ-自由 ΓG-模是同构的(文献[66]),但这个结论的必要性对一般的 ΓG-模是不成立的.

1.3.3　矩阵 G-代数

设 A 是一个 G-代数,并设 $M_{|G|}(A)$ 是 $|G|$-级系数在 A 中的全矩阵代数,那么 $M_{|G|}(A)$ 也是一个有限秩的自由 Γ-代数.如果我们用 G 中的元素去标记 $M_{|G|}(A)$ 的行和列,那么按下面的方式我们得到一个 G-代数:

$$({}^x m)_{y,z} = {}^x(m_{x^{-1}y,x^{-1}z}),\ x,y,z \in G, m \in M_{|G|}(A).$$

我们称它是 G-代数 A 的矩阵 G-代数.此时,

$$f: A \to M_{|G|}(A),\ f(a)_{1,1} = a,$$

$$f(a)_{x,y} = 0,\ (x,y) \neq (1,1),\ a \in M_{|G|}(A)$$

诱导出一个 A 的点和 $M_{|G|}(A)$ 的点之间的双射.

1.3.4　斜群环 A * G

设 A 是一个 G-代数,我们用 $A * G$ 表示由群 G 中的全体元素在 A 上生成的自由左 A-模.它同时按下面的乘法作成一个环:

$$(ax)\cdot(by) = a({}^x b)xy,\ a,b \in A, x,y \in G.$$

我们称它为群 G 在 G-代数 A 上的斜群环.我们习惯上将 A 等同为 $A \cdot 1_G$,以及将 G 等同为 $1_A G$.如果群 G 平

凡地作用在 A 上,那么 $A * G = AG$ 是群 G 在 $\mathcal{C}$-代数 A 上的群环,如果此时代数 A 是交换的,那么 $A * G$ 即是一个群代数.

容易知道,按下面的作用方式我们把 A 定义为一个左和右 $A * G$-模,我们分别称它为主左和主右 $A * G$-模.设 V 是一个右 $A * G$-模,那么按下面的方式:

$${}^{g}\varphi(v) = \varphi(vg)g^{-1}, g \in G, v \in V, \varphi \in \mathrm{End}_A(V)$$

将 $\mathrm{End}_A(V)$ 作成一个 G-代数.特别地,G-代数 A 与 G-代数 $\mathrm{End}_A(A)$ 是典范同构的.也就是说,每一个代数都可以通过它所对应的纽群环上的主右模的自同态环来实现,但一般来说,是不能通过 $\mathcal{C}G$-模的自同态环来实现的.

如果 A 还是一个内 G-代数,那么 $A * G$ 按下面的方式作成了一个内 $\dot{G} \times G$-代数:

$$\mathcal{C}(G \times G) \to A * G, (x, y) \mapsto \rho(xy^{-1})y, x, y \in G.$$

此时,A 是一个局部内 G-代数,当且仅当 A 是不可分解 $A * G$-模,并且 A 的亏群恰是 A 作为 $A * G$-模的顶.

1.3.5 纽群代数 $R^{\alpha}G$

设 G 是有限群,R^* 表示域 R 的乘法群,用 $Z^2(G, R^*)$ 表示下面的函数的全体:

$$\alpha: G \times G \to R^*,$$

$$\alpha(x,1) = \alpha(1,x) = 1, \alpha(x,y)\alpha(xy,z)$$

$$= \alpha(y,z)\alpha(x,yz), x,y,z \in G.$$

在 $Z^2(G,R^*)$ 上定义乘法如下:

$$\alpha\beta(x,y) = \alpha(x,y)\beta(x,y), x,y \in G, \alpha,\beta \in Z^2(G,R^*).$$

那么 $Z^2(G,R^*)$ 作成一个加法群.

又设 $\alpha \in Z^2(G,R^*)$,那么以 $R^\alpha G$ 表示域 R 上的向量空间,它有一组基 $g \in G$,在 $R^\alpha G$ 上定义乘法如下:

$$x \cdot y = \alpha(x,y)xy,$$

那么 $R^\alpha G$ 作成域 R 上的纽群代数.事实上,域 R 上的任一纽群代数都可以通过这种方式得到.如果 $\alpha = 1$,那么 $R^\alpha G$ 就是(常)群代数 RG.同时,纽群代数 $R^\alpha G$ 是一个 G- 代数(但通常不是一个内 G- 代数),它同时也是一个对称代数.

设 V 是域 R 上的有限维向量空间,映射

$$\rho: G \to GL(V)$$

称为群 G 在域 R(上的向量空间 V)上的 α- 投射表示,如果存在 $\alpha: G \times G \to R^*$ 使得

$$\rho(1) = 1_V, \rho(x)\rho(y) = \alpha(x,y)\rho(xy), x,y \in G.$$

显然,此时 $\alpha \in Z^2(G,R^*)$.由此我们得到一个纽群代数 $R^\alpha G$,并且 V 作成一个 $R^\alpha G$- 模.通常的群表示是当 $\alpha = 1$ 时的投射表示.容易得知,群 G 在域 R 上的 α- 投射表示与 $R^\alpha G$- 模是一一对应的.

1.3.6　$\mathcal{O}G$- 图表

有限有向图是一个三元组 (D,E,μ),这里 D 和 E 是

有限集合,分别称为顶点集和边集,并且 $\mu: E \to D \times D$ 是一个映射.

对于每个边 $e \in E$, $\mu(e) = (d_1, d_2)$, d_1 称为始点, d_2 称为终点,我们有时也把 D 简称为图.

设 D 是一个有限有向图, D 的 $\mathcal{O}G$-图表是由一簇模 M_d, $d \in D$ 和一簇 $\mathcal{O}G$-线性映射 $f_e: M_{d_1} \to M_{d_2}$, $\mu(e) = (d_1, d_2)$, $d_1, d_2 \in D$ 组成.

我们将图表看做是对 (M, f),这里 M 是在 d 上取值为 M_d 的从 D 到 $\mathcal{O}G$-模的函数, f 是从 E 到 $\mathcal{O}G$-模的函数. 图 D 的 $\mathcal{O}G$-图表有时也称为图 D 的由 $\mathcal{O}G$-线性映射给出的表示.

给定 D 的两个 $\mathcal{O}G$-图表 (M, f) 和 (M', f'),我们定义下面的 $\mathcal{O}G$-线性同态:

$$\psi: (M, f) \to (M', f'), \psi_d: M_d \to M'_d, d \in D,$$

使得 $f'_e \psi_{d_1} = \psi_{d_2} f_e$,对任意的 $d_1, d_2 \in D$, $e \in E$,使得 $\mu(e) = (d_1, d_2)$,并记 $\mathrm{Home}_{\mathcal{O}G}((M, f), (M', f'))$ 是上述 $\mathcal{O}G$-线性同态的全体.

显然边为空集合,只有一个顶点的图的 $\mathcal{O}G$-图表就是我们通常的 $\mathcal{O}G$-模. 并且 $\mathcal{O}$-自同态代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M, f)$ 以下面的结构同态作成了一个内 G-代数:

$$\phi: G \to \prod_{d \in D} \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M_d), g \mapsto (g \cdot id_{M_d})$$

第2章　G-相伴关系和内 G-代数的中心化子的块

2.1　研究思路和主要结论

在文献[9]中,为了推广 Alperin 猜想,Barker 通过应用模的双自同态代数的 G-代数结构,提出了连通模以及模的中心分支的亏群的概念,并且通过模的中心分支的不可分解直因子的顶和该中心分支所属于的群代数的块的亏群,给出了模的中心分支的亏群的上界和下界.文献[4]继续研究了连通模的张量积的亏群问题.同时,在文献[9]研究了模的双自同态代数的块,并给出了块的相伴关系.本章我们将模的双自同态代数的块的相伴关系推广到一般的 G-代数的点上去,给出了 G-代数的重数为1的点上的 G-相伴关系,发现它是重数为1的点上的 Green 对应的延伸.我们刻画了所得到的 G-相伴关系以及用它刻画了扩张 Green 对应,并且发现该相

伴关系与 Brauer 对应相容.我们还将该相伴关系恰当地应用到内 G- 代数的不动点子代数的中心化子的块上去,得到了不同的不动点子代数的中心化子的块之间 G- 相伴关系,并且发现它还与块的张量积相容.

下面我们给出本章的主要结论.

设 A 是一个 H- 代数,B 是一个 G- 代数,并且

$$f:A \to \mathrm{Res}_H^G B$$

是一个酉 H- 代数同态,这里

$$N_G(P) \leqslant H \leqslant G,$$

P 是 G 的一个 p- 子群.那么对于 B^G 的在 G 中亏群为 P 的点 α,如果 $m_\alpha = 1$,我们首先得到它在$(\mathrm{Res}_H^G B)^H$ 中的 Green 对应点,它也是重数为 1 的,再通过 f,我们唯一地决定了 A^H 的一个重数为 1 的点,我们称 A^H 中的这个点为 α 的 H- 相伴点.

设 A 是一个 G- 代数,B 是一个内 H- 代数,并且 $f:A \to \mathrm{Ind}_H^G B$ 是一个 G- 代数同态,这里

$$N_G(P) \leqslant H \leqslant G,$$

P 是 G 的一个 p- 子群.那么对于 B^H 的在 H 中亏群为 P 的点 β,如果 $m_\beta = 1$,由与上面类似的过程,我们唯一地决定了 β 的在 A^G 中的 G- 相伴点.

通过分析点的重数和比较相对应的点的亏群,我们刻画了上面的相伴关系,还证明了上述相伴关系通过块与局部内 G- 代数之间的属于关系而与块的 Brauer 对应

相容,以及该相伴关系刻画了扩张 Green 对应.结论如下:

定理 2.1.1　(1) 设 A 是一个 H- 代数,B 是一个 G- 代数.假定 $f:A\to \mathrm{Res}_H^G B$ 是一个酉 H- 代数同态,那么对于 B^G 的每个在 G 中的亏群是 P 的点 α,如果 $m_\alpha=1$,则 α 唯一地决定了 A^H 的一个点 $\mathrm{ass}_H(\alpha)$,并且

$$P\leqslant_H D(\mathrm{ass}_H(\alpha)),$$

$$m_{\mathrm{Br}_P^B(\alpha)}(\mathrm{Br}_P^B(f(\mathrm{ass}_H(\alpha))))\geqslant 1,$$

$$m_{\mathrm{ass}_H(\alpha)}=1.$$

(2) 设 A 是一个 G- 代数,B 是一个内 H- 代数.假定 $f:A\to \mathrm{Ind}_H^G B$ 是一个酉 G- 代数同态,那么对于 B^H 的每个在 H 中的亏群是 P 的点 β,如果 $m_\beta=1$,则 β 唯一地决定了 A^G 的一个点 $\mathrm{ass}_G(\beta)$,并且

$$P\leqslant_G D(\mathrm{ass}_G(\beta)),$$

$$m_{\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G B}(1_G\otimes_H\beta\otimes_H 1_G)}(\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G B}(f(\mathrm{ass}_G(\beta))))\geqslant 1,$$

$$m_{\mathrm{ass}_G(\beta)}=1$$

注 2.1.2　对应于文献[9]中的定义,我们称 $\mathrm{ass}_H(\alpha)$ 是 α 的 H- 相伴点,并称 $\mathrm{ass}_G(\beta)$ 是 β 的 G- 相伴点.显然我们提出的相伴关系包含了重数为 1 的点上的 Green 对应关系,从而是 Green 对应关系的延伸.

定理 2.1.3　(1) 在定理 2.1.1(1) 中,假设(A,ρ_A)是一个内 H- 代数,并且(B,ρ_B)是一个内 G- 代数.如果 α

和 $\mathrm{ass}_H(\alpha)$ 分别属于 G 的块 e' 和 H 的块 f'，那么 e' 和 f' 是 Brauer 对应下的块.

(2) 在定理 2.1.1(2) 中，假设 (A,ρ_A) 是一个内 G-代数. 如果 $\mathrm{ass}_G(\beta)$ 和 β 分别属于 G 的块 e' 和 H 的块 f'，那么 e' 和 f' 是 Brauer 对应下的块.

定理 2.1.4 设 A 是一个局部内 G-代数，B 是一个局部内 H-代数，并且 B 是 A 的关于亏群 P 的扩张 Green 对应(文献[32]). 那么

(1) B 是 $\mathrm{ass}_H(1_A)\cdot A\cdot \mathrm{ass}_H(1_A)$ 的嵌入局部内 H-代数；

(2) A 是 $\mathrm{ass}_G(1_B)(\mathrm{Ind}_H^G B)\mathrm{ass}_G(1_B)$ 的嵌入局部内 G-代数.

一般地，对于 G-代数 A，它的 G-不动点子代数的中心化子代数 $C_A(A^G)$ 不再是一个 G-代数，但有趣的是，对于一个内 G-代数 (A,ρ)，它的 G-不动点子代数的中心化子代数 $C_A(A^G)$ 仍是一个内 G-代数，由此，我们可以分析这个新的内 G-子代数的块代数. 我们注意到，$C_A(A^G)$ 的 G-不动点子代数、$C_A(A^G)$ 的中心，以及 A^G 的中心是一致的，结合块是重数为 1 的点这个事实，上面的重要观察使得上述 G-代数的点上的相伴关系可以合理地应用到 G-代数的不动点子代数的中心化子的块上去，由此我们相应地得到了 G-代数的不动点子代数的中心化子的块上的相伴关系.

对于内 G-代数 (A,ρ)，我们找到了内 G-代数 $C_A(A^G)$ 的块与限制后的内 H-代数 $\mathrm{Res}_H^G A$ 的 H-不动点子代数的中心化子代数

$$C_{\mathrm{Res}_H^G A}((\mathrm{Res}_H^G A)^H)$$

的块之间的相伴关系. 对于内 H-代数 (B,ρ)，我们找到了内 H-代数 $C_B(B^H)$ 的块与诱导后的内 G-代数 $\mathrm{Ind}_H^G B$ 的 G-不动点子代数的中心化子代数

$$C_{\mathrm{Ind}_H^G B}((\mathrm{Ind}_H^G B)^G)$$

的块之间的相伴关系. 我们证实了这种相伴关系与块的 Brauer 对应和内 G-代数的张量积相容，而且，我们还用这种相伴关系刻画了文献[32]中的扩张 Green 对应（定理 2.1.4）. 结论如下：

定理 2.1.5　(1) 设 (A,ρ_A) 是一个内 G-代数，α 是 $C_A(A^G)$ 的亏群为 P 的块. 那么存在

$$C_{\mathrm{Res}_H^G A}((\mathrm{Res}_H^G A)^H)$$

的唯一的块 $\mathrm{ass}_H(\alpha)$，使得

$$\mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(\mathrm{ass}_H(\alpha)\alpha) \neq 0, P \leqslant_H D(\mathrm{ass}_H(\alpha));$$

(2) 设 (B,ρ_B) 是一个内 H-代数，β 是 $C_B(B^H)$ 的一个亏群为 P 的块. 那么存在

$$C_{\mathrm{Ind}_H^G B}((\mathrm{Ind}_H^G B)^G)$$

的唯一的块 $\mathrm{ass}_G(\beta)$，使得

$$\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\mathrm{ass}_G(\beta)\beta) \neq 0, P \leqslant_G D(\mathrm{ass}_G(\beta)).$$

定理 2.1.6 (A,ρ_A) 是一个内 G-代数，并且 (B,ρ_B) 是一个内 H-代数. 设 α,β 分别是 $C_A(A^G)$ 和 $C_B(B^H)$ 的块，并且它们有相同的亏群 P.

(1) 如果 $\alpha,\mathrm{ass}_H(\alpha)$ 分别属于 G,H 的块 e,f，那么 e 和 f 是 Brauer 对应下的块.

(2) 如果 $\mathrm{ass}_G(\beta),\beta$ 分别属于 G,H 的块 e,f，那么 e 和 f 是 Brauer 对应下的块.

定理 2.1.7 设 H_i 是 G_i 的子群，P_i 是 G_i 的 p-子群，并且

$$N_i:=N_{G_i}(P_i)\leqslant H_i,\quad i=1,2.$$

又设 (A_i,ρ_{A_i}) 是一个 $\mathcal{O}$-自由有限秩的内 G_i-代数，α_i 是 $C_{A_i}(A_i^{G_i})$ 的块，并且 (B_i,ρ_{B_i}) 是一个内 H_i-代数，β_i 是 $C_{B_i}(B_i^{H_i})$ 的块，$i=1,2$. 那么 $\alpha_1\otimes\alpha_2$ 和 $\beta_1\otimes\beta_2$ 分别是 $C_{A_1\otimes A_2}((A_1\otimes A_2)^{G_1\times G_2})$ 和 $C_{B_1\otimes B_2}((B_1\otimes B_2)^{H_1\times H_2})$ 的块，而且有

(1) $\mathrm{ass}_{H_1\times H_2}(\alpha_1\otimes\alpha_2)=\mathrm{ass}_{H_1}(\alpha_1)\otimes\mathrm{ass}_{H_2}(\alpha_2)$;

(2) $\mathrm{ass}_{G_1\times G_2}(\beta_1\otimes\beta_2)=\mathrm{ass}_{G_1}(\beta_1)\otimes\mathrm{ass}_{G_2}(\beta_2)$.

2.2 G-相伴关系

首先，设 A 是一个 H-代数，B 是一个 G-代数，并且

$$f:A\to\mathrm{Res}_H^G B$$

是一个西 H-代数同态，这里

$$N_G(P) \leqslant H \leqslant G,$$

P 是 G 的一个 p- 子群.我们研究:

$$A \xrightarrow{f} \mathrm{Res}_H^G B \xrightarrow{\text{Green correspondence for points}} B.$$

那么,对于 B^G 的在 G 中亏群为 P 的点 α,如果 $m_\alpha = 1$,我们首先得到它在 $(\mathrm{Res}_H^G B)^H$ 中的 Green 对应点,它也是重数为 1 的,再通过 f,我们唯一地决定了 A^H 的一个重数为 1 的点.我们称 A^H 中的这个点为 α 的 H- 相伴点.

其次,我们设 A 是一个 G- 代数,B 是一个内 H- 代数,并且

$$f: A \to \mathrm{Ind}_H^G B$$

是一个酉 G- 代数同态,这里

$$N_G(P) \leqslant H \leqslant G,$$

P 是 G 的一个 p- 子群.我们研究:

$$A \xrightarrow{f} \mathrm{Ind}_H^G B \xrightarrow{\text{Green correspondence for points}} B.$$

那么,对于 B^H 的在 H 中亏群为 P 的点 β,如果 $m_\beta = 1$,由与上面类似的过程,我们唯一地决定了 β 的在 A^G 中的 G- 相伴点.

通过分析点的重数和比较相对应的点的亏群,我们刻画了上面的相伴关系.在这一节,我们还证明上述相伴关系与 Brauer 对应的相容.

引理 2.2.1　设 $f: A \to B$ 是一个酉 G- 代数同态,β 是 B^G 的一个点.如果 $m_\beta = 1$,那么 β 唯一地决定了 A^G 的

一个点 α，并且

$$m_\beta(f(\alpha)) \geq 1, D(\beta) \leq_G D(\alpha), m_\alpha = 1.$$

证明：因为 β 是 B^G 的一个点，由文献[66](Lemma 4.13)，存在 B^G 的唯一的极大理想 M_β，使得 $\beta \not\subseteq M_\beta$.

设 $j \in \beta$ 以及

$$1 = j + \sum_{l=1}^{n} x_l$$

是 1_B 在 B^G 中的一个本原正交幂等元分解.

由于 $m_\beta = 1$，那么 $x_l \in M_\beta$ 以及

$$j \in f(A^G) + M_\beta,$$

结合文献[66](Theorem 3.12)，我们得到

$$0 \neq \beta = \beta + M_\beta$$

是

$$(f(A^G) + M_\beta)/M_\beta$$

的唯一的点，并且 $m_\beta = 1$.

显然，

$$f(A^G)/(f(A^G) \cap M_\beta) \to (f(A^G) + M_\beta)/M_\beta,$$

$$a + f(A^G) \cap M_\beta \mapsto a + M_\beta$$

是一个 $\mathcal{O}$-代数同构，再次由文献[66](Theorem 3.12)，存在 $f(A^G)$ 的唯一的一个点 β'，满足 $m_{\beta'} = 1$ 以及

$$\beta' + M_\beta = \beta + M_\beta$$

是

$$(f(A^G) + M_\beta)/M_\beta$$

的点，由此存在 A^G 的唯一的点 α，使得 $m_\alpha = 1$ 以及

$$f(\alpha) = \beta',$$

而且存在 $i \in A^G$，使得

$$f(i) - j \in M_\beta.$$

如果 $m_\beta(f(\alpha)) = 0$，那么 $f(i) \in M_\beta$，并且 $j \in M_\beta$，矛盾．即

$$m_\beta(f(\alpha)) \geqslant 1.$$

由上述证明我们知道存在某个本原幂等元 $i' \in \alpha$，使得

$$j = f(i')j \in f(\alpha)\beta \subseteq f(A^G_{D(\alpha)}B) \subseteq f(A)^G_{D(\alpha)}B \subseteq B^G_{D(\alpha)}.$$

也即

$$D(\beta) \leqslant_G D(\alpha).$$

参见文献 [48]（Proposition 3.6）和文献 [66]（Proposition 16.1），我们得到下面的经典结论：

引理 2.2.2　设 H 是有限群 G 的一个子群，B 是一个内 H- 代数．那么

$$i := 1_G \otimes_{H} 1_B \otimes_{H} 1_G$$

是 $\mathrm{Ind}_H^G B$ 的一个幂等元，并且作为内 H- 代数，

$$B \backsimeq i(\mathrm{Ind}_H^G B)i,$$

以及作为 G- 代数，

$$\mathrm{Ind}_H^G B \backsimeq Mn(B),$$

这里 $n = |G:H|$ 和 $M_n(B)$ 是 B 上的全体矩阵的集合．

我们再次回顾下面的被专家称为 G- 代数的点上的

Green 对应.

引理 2.2.3 设 A 是一个 G-代数, P 是 G 的一个 p-子群, H 是 G 的子群. 如果 $N:=N_G(P)\leqslant H$, 那么存在一个 A^G 的在 G 中亏群为 P 的点和 A^H 的在 H 中亏群为 P 的点之间的一一对应, 而且, 如果点 $\alpha\in A^G$ 和点 $\beta\in A^H$ 是该对应关系下的对应点, 那么

$$\mathrm{Br}_P^A(\alpha)=\mathrm{Br}_P^A(\beta)$$

是 $A(P)^N$ 的一个点, 并且 $m_\alpha=m_\beta$.

定理 2.1.1 的证明: (1) 由引理 2.2.3 中的点之间的一一对应, 存在 α 的 Green 对应点 α', 使得

$$m_{\alpha'}=m_\alpha=1,$$

并且

$$\mathrm{Br}_P^B(\alpha')=\mathrm{Br}_P^B(\alpha)$$

是 $B(P)^N$ 的一个点, 这里 α' 是 $(\mathrm{Res}_H^G B)^H$ 的一个点.

由引理 2.2.1, α' 唯一地决定了 A^H 的一个点, 这里记为 $\mathrm{ass}_H(\alpha)$, 它使得

$$m_{\alpha'}(f(\mathrm{ass}_H(\alpha)))\geqslant 1,$$

$$m_{\mathrm{ass}_H(\alpha)}=1,$$

$$P=D(\alpha')\leqslant_H D(\mathrm{ass}_H(\alpha)).$$

因为

$$B^H\alpha' B^H\subseteq B^H f(\mathrm{ass}_H(\alpha))B^H,$$

那么

$$\mathrm{Br}_P^B(f(\mathrm{ass}_H(\alpha)))\neq 0,$$

并且

$$m_{\mathrm{Br}_P^B(\alpha)}(\mathrm{Br}_P^B(f(\mathrm{ass}_H(\alpha))))$$
$$= m_{\mathrm{Br}_P^B(\alpha')}(\mathrm{Br}_P^B(f(\mathrm{ass}_H(\alpha)))) \geqslant 1.$$

(2) 由引理 2. 2. 2, B 可以看做 $\mathrm{Ind}_H^G B$ 的内 H- 子代数, 也就是 $i(\mathrm{Ind}_H^G B)i$, 这里 $i = 1_G \otimes_{\mathcal{O}H} 1_B \otimes_{\mathcal{O}H} 1_G$.

因为

$$1_G \otimes_{\mathcal{O}H} \beta \otimes_{\mathcal{O}H} 1_G$$

是 $i(\mathrm{Ind}_H^G B)^H$ 的亏群为 P 的点, 由文献 [66] (Proposition 4. 1. 2), 我们知道

$$1_G \otimes_{\mathcal{O}H} \beta \otimes_{\mathcal{O}H} 1_G$$

是$(\mathrm{Ind})_H^G B)^H$ 的亏群为 P 的点.

如果

$$1_{B^H} = j_1 + j_2 + \cdots + j_n$$

是 1_{B^H} 在 B^H 中的一个本原正交幂等元分解, 这里 $j_1 \in \beta$, 那么

$$1_{(\mathrm{Ind}_H^G B)^H} = \sum_{t=1}^{n} 1 \otimes_{\mathcal{O}H} j_t \otimes_{\mathcal{O}H} 1 + \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{s=2}^{m} g_s \otimes_{\mathcal{O}H} j_t \otimes_{\mathcal{O}H} g_s^{-1}\right)$$

是单位元在$(\mathrm{Ind}_H^G B)^H$ 中的正交幂等元分解, 这里

$$\{g_1 = 1, g_2, g_2, \cdots, g_m\}$$

是 H 在 G 中的一个陪集代表系.

设

$$\beta = \{j_{11} = j_1, j_{12}, \cdots, j_{1l}\},$$

因为

$$(1 \otimes_{\mathcal{O}H} j_{1r} \otimes_{\mathcal{O}H} 1) \sum_{S=2}^{m} g_s \otimes_{\mathcal{O}H} j_t \otimes_{\mathcal{O}H} g_s^{-1} = 0,$$

$$r = 1,2,\cdots,1; t = 1,2,\cdots,n$$

我们知道，

$$1 \otimes_{\mathcal{O}H} \beta \otimes_{\mathcal{O}H} 1$$

是$(\mathrm{Ind}_H^G B)^H$的一个点，并且

$$m_{1 \otimes_{\mathcal{O}H} \beta \otimes_{\mathcal{O}H} 1} = 1.$$

综上可知，(2) 可以由与(1) 类似的证明过程得到.

我们回顾Brauer对应的定义：设P是G的一个p-子群，$H \leqslant G$并且$C_G(P) \leqslant H$，又设f是H的一个块. 对于G的任一块e，显然

$$\mathrm{Br}_P^{kG}(\bar{e}) \in (kC_G(P))^G,$$

那么存在G的唯一的块e_0，使得

$$\bar{f}\,\mathrm{Br}_p^{kG}(\bar{e_0}) = \bar{f},$$

我们称e_0是f的Brauer对应块(文献[2]).

我们回顾文献[32]中局部内G-代数属于群代数的块的定义：(A,ρ)是一个局部内G-代数，我们称(A,ρ)属于群G的块$B(=\mathcal{O}Ge_B)$，如果$\rho(e_B) = 1_A$. 类似地，对于任意一个内G-代数A的中心化子$C_A(A^G)$的块α，存在$\mathcal{O}G$唯一的块e，使得

$$\rho(e)\alpha = \alpha,$$

此时，我们称α属于e.

定理 2.1.3 的证明：(1) 因为α属于G的块e'，以及

$\mathrm{ass}_H(\alpha)$ 属于 H 的块 f',那么

$$\rho_B(e')\alpha = \alpha, \rho_A(f')\mathrm{ass}_H(\alpha) = \mathrm{ass}_H(\alpha).$$

由定理 2. 1. 1,我们得到

$$m_{\mathrm{Br}_P^B(\alpha)}(\mathrm{Br}_P^B(f(\mathrm{ass}_H(\alpha)))) \geqslant 1.$$

由上可知存在 $i \in \mathrm{ass}_H(\alpha)$ 和 $j \in \alpha$,使得

$$\begin{aligned}\mathrm{Br}_P^B(\rho_B(e')j) &= \mathrm{Br}_P^B(f(\rho_A(f')i))\mathrm{Br}_P^B(\rho_B(e')j)\\ &= \mathrm{Br}_P^B(f(\rho_A(f')i)\rho_B(e')j)\\ &= \mathrm{Br}_P^B(f(i)f(\rho_A(f'))\rho_B(e')j)\end{aligned}$$

是 $B(P)^{\times}$ 的一个本原幂等元,由此

$$\begin{aligned}&\mathrm{Br}_P^B(f(\rho_A(f'))\rho_B(e'))\\ &= \mathrm{Br}_P^B(f(f' \cdot 1_A)(\rho_B(e')))\\ &= \mathrm{Br}_P^B((f(1_A) \cdot f')\rho_B(e'))\\ &= \mathrm{Br}_P^B((1_B \cdot f')\rho_B(e'))\\ &= \mathrm{Br}_P^B(\rho_B(f')\rho_B(e'))\\ &= \mathrm{Br}_P^B(\rho_B(f'e'))\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

那么我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Br}_P^{kG}(f'e') &= \mathrm{Br}_P^{kG}(\overline{f'e'})\\ &= \mathrm{Br}_P^{kG}(\overline{f'})\mathrm{Br}_P^{kG}(\overline{e'})\\ &= \mathrm{Br}_P^{kG}(\overline{f'})\mathrm{Br}_P^{kG}(\mathrm{Br}_P^{kG}(\overline{e'}))\\ &= \mathrm{Br}_P^{kG}(\overline{f'}\mathrm{Br}_P^{kG}(\overline{e'}))\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

由此

$$\overline{f'}\mathrm{Br}_p^{kG}(\overline{e'}) \neq 0,$$

也就是说，e' 和 f' 是 Brauer 对应下的块.

(2) 与(1) 的证明相似.

2.3 内 G- 代数的不动点子代数的中心化子

在这一节，我们研究内 G- 代数的不动点子代数的中心化子代数的块，我们主要是将 2.2 节中的重数为 1 的点上的相伴关系应用到内 G- 代数的不动点子代数的中心化子代数的块上去，从而，我们的结论推广了文献 [9] 中的相应结论.

一般地，对于 G- 代数 A，它的 G- 不动点子代数的中心化子代数 $C_A(A^G)$ 不再是一个 G- 代数，但有趣的是，对于一个内 G- 代数(A,ρ)，它的 G- 不动点子代数的中心化子代数 $C_A(A^G)$ 仍是一个内 G- 代数，由此，我们可以分析这个新的内 G- 子代数的块代数.而且，$C_A(A^G)$ 的 G- 不动点子代数，$C_A(A^G)$ 的中心，以及 A^G 的中心是一致的，即

$$(C_A(A^G))^G = Z(C_A(A^G)) = Z(A^G).$$

结合块是重数为 1 的点这个事实，上面的重要观察使得上述的 G- 代数的点上的相伴关系可以合理地应用到 G- 代数的 G- 不动点子代数的中心化子的块上去，由此，我

们相应地得到了 G- 代数的 G- 不动点子代数的中心化子的块上的相伴关系.

对于内 G- 代数 (A,ρ), 按照 2.2 节的结论, 我们找到了内 G- 代数 $C_1(A^G)$ 的块与限制后的内 H- 代数 $\mathrm{Res}_H^G A$ 的 H- 不动点子代数的中心化子代数 $C_1(A^H)$ 的块之间的相伴关系. 对于内 H- 代数 (B,ρ), 我们找到了内 H- 代数 $C_B(B^H)$ 的块与诱导后的内 G- 代数 $\mathrm{Ind}_H^G B$ 的 G- 不动点子代数的中心化子代数

$$C_{\mathrm{Ind}_H^G B}((\mathrm{Ind}_H^G B)^G)$$

的块之间的相伴关系. 我们证实了这种相伴关系与块的 Brauer 对应和内 G- 代数的块的张量积相容, 而且, 我们还用这种相伴关系刻画了文献[32]中的扩张 Green 对应(定理 2.1.4).

定理 2.1.5 的证明: (1) 在定理 2.1.1(1) 中, 我们设 $f: A \to \mathrm{Res}_H^G B$ 是下面的包含映射:

$$C_{\mathrm{Res}_H^G A}((\mathrm{Res}_H^G A)^H) \to \mathrm{Res}_H^G C_A(A^G).$$

那么容易得到 $\mathrm{ass}_H(\alpha)$ 是唯一的, 本结论从定理 2.1.1(1) 的结论得到.

(2) 由引理 2.2.2, 我们知道

$$\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H) = C_{\mathrm{Ind}_H^G B}(\mathrm{Tr}_H^G(B^H)) \supseteq C_{\mathrm{Ind}_H^G B}((\mathrm{Ind}_H^G B)^G).$$

这里我们把 B 等同为 $i(\mathrm{Ind}_H^G B)i$. 如果我们设 $f: A \to \mathrm{Ind}_H^G B$ 是

$$C_{\mathrm{Ind}_H^G B}((\mathrm{Ind}_H^G B)^G) \to \mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H).$$

那么本结论由定理 2.1.1(2) 的结论得到.

我们回顾 G-代数上的 Brauer 第一主要定理(文献[48]),它事实上也是 Puig 对应(文献[66]).

引理 2.3.1 设 A 是一个 G-代数,P 是 G 的一个 p-子群. 那么 Brauer 同态 Br_P^A 限制到 A_P^G 上是一个从 A_P^G 到 $A(P)_P^{N_G(P)}$ 的满同态,而且这个满同态诱导了 A^G 的在 G 中亏群为 P 的点和 $A(P)^{N_G(P)}$ 的在 $N_G(P)$ 中亏群为 P 的点之间的一一对应,同时该满同态保持相对应的点的重数.

另证定理 2.1.5:(1) 由引理 2.3.1,$\mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(\alpha)$ 是

$$[C_A(A^G)](P)^N$$

的一个本原幂等元. 因为

$$Z(C_{\mathrm{Res}_H^G A}((\mathrm{Res}_H^G A)^H)) = (C_{\mathrm{Res}_H^G A}((\mathrm{Res}_H^G A)^H))^H,$$

以及它是 $(C_A(A^G))^P$ 的一幺子代数,我们有

$$\mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(b_k\alpha),$$

这里 $b_k(k = 1,2,\cdots,n)$ 是

$$C_{\mathrm{Res}_H^G A}((\mathrm{Res}_H^G A)^H)$$

的块,它使得

$$\mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(b_k\alpha) \neq 0.$$

又因为

$$\alpha \in ZC_A(A^G) = Z(A^G) \subseteq A^H,$$

我们有

$$b_k\alpha = \alpha b_k,$$

那么

$$\mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(b_k\alpha)\ (k = 1,2,\cdots,n)$$

是两两正交的幂等元.

因此存在

$$C_{\mathrm{Res}_H^G A}((\mathrm{Res}_H^G A)^H)$$

的唯一的块 b_k,它也被表示成 $\mathrm{ass}_H(\alpha)$,使得

$$\mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(\mathrm{ass}_H(\alpha)\alpha) = \mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(\alpha) \neq 0.$$

现在,因为

$$\mathrm{ass}_H(\alpha) \in I_P(C_A(A^G))$$

和

$$C_{\mathrm{Res}_H^G A}((\mathrm{Res}_H^G A)^H) \subseteq C_A(A^G),$$

我们知道

$$\mathrm{ass}_H(\alpha) \in I_P(C_{\mathrm{Res}_H^G A}((\mathrm{Res}_H^G A)^H)),$$

由此,

$$P \leqslant_H D(\mathrm{ass}_H(\alpha)).$$

(2) 由引理 2.2.2,我们有下面的内 H- 代数同构:

$$C_B(B^H) \backsimeq i(\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H))i,$$

这里,

$$i = 1_G \otimes_{\mathcal{O}H} 1_B \otimes_{\mathcal{O}H} 1_G.$$

由此同构,作为一个内 H- 代数,$C_B(B^H)$ 被看做是 $\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)$ 的一个子代数,它有单位元 i,并且 β,由引理 2.2.2 中的另一个 $\mathcal{O}$- 代数同构,等同于

$$1_G \otimes_{\mathcal{O}H} \beta \otimes_{\mathcal{O}H} 1_G,$$

可以被看做是

$$(\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H))^H$$

的一个本原幂等元.

现在,对于任意的 $Q \leqslant P$ 和 $t \in (\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H))^Q$,我们有

$$i\mathrm{Tr}_Q^P(t)i = \mathrm{Tr}_Q^P(iti),$$

因此

$$C_B(B^H) \cap I_P(\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)) = I_P(C_B(B^H)).$$

由此,我们得到 β 是一个属于

$$(\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H))^H$$

的某个点的亏群为 P 的本原幂等元,那么由引理 2.3.1,

$$\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\beta)$$

是

$$[\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)](P)^\wedge$$

的一个本原幂等元.

设 $\beta = \mathrm{Tr}_P^H(j)$,这里

$$j \in (C_B(B^H))^P.$$

由 Mackey 分解公式,有

$$\mathrm{Tr}_H^G(\beta) = \mathrm{Tr}_P^G(j) = \sum_{g \in P\backslash G/P} \mathrm{Tr}_{P^g \cap P}^P({}^{g^{-1}}j),$$

并且因为

$$C_B(B^H) \cong i(\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H))i \subseteq \mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H),$$

我们知道

$$\begin{aligned}\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\beta) &= \mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\mathrm{Tr}_P^H(j)) \\ &= \mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\mathrm{Tr}_P^N(j)) \\ &= \mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\mathrm{Tr}_H^G(\beta)) \\ &= \sum_{l=1}^{m} \mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(e_l \mathrm{Tr}_H^G(\beta)) \\ &= \sum_{l=1}^{m} \mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\mathrm{Tr}_H^G(e_l\beta)) \\ &= \sum_{l=1}^{m} \mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(e_l\beta),\end{aligned}$$

这里,

$$e_l(l = 1,2,\cdots,m)$$

是

$$C_{\mathrm{Ind}_H^G B}((\mathrm{Ind}_H^G B)^G)$$

的块,使得

$$\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(e_l\beta) \neq 0.$$

由引理 2. 2. 2 易知

$$\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H) = C_{\mathrm{Ind}_H^G B}(\mathrm{Tr}_H^G(B^H)) \supseteq C_{\mathrm{Ind}_H^G B}((\mathrm{Ind}_H^G B)^G),$$

那么

$$I_P(C_{\mathrm{Ind}_H^G B}((\mathrm{Ind}_H^G B)^G)) \subseteq I_P(\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)).$$

结合以上推断过程,容易知道命题得证.

定理 2. 1. 6 的证明:(1) 在定理 2. 1. 3(1) 的情形下,我们设$(C_A(A^G)\rho_A)$是(A,ρ_A)的 G- 不动点子代数的中心化子.

(2) 在定理 2.1.3(2) 的情形下,如果设$(C_B(B^H),\rho_B)$是(B,ρ_B)的 H- 不动点子代数的中心化子,那么容易得知(2) 成立.

另证定理 2.1.6:(1) 在(1) 的情形下,我们有

$$\rho_A(e)\alpha=\alpha$$

和

$$\rho_A(f)\mathrm{ass}_H(\alpha)=\rho_{\mathrm{Res}_H^G A}(f)\mathrm{ass}_H(\alpha)=\mathrm{ass}_H(\alpha),$$

那么

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(\rho_A(f)\mathrm{ass}_H(\alpha)\alpha)\\
&=\mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(\mathrm{ass}_H(\alpha)\alpha)\\
&=\mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(\rho_A(e)\alpha),
\end{aligned}$$

因此,

$$\mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(\rho_A(fe))\neq 0.$$

因为

$$\rho_A(I_P(\mathcal{O}G))\subseteq I_P(C_A(A^G)),$$

我们得到

$$\mathrm{Br}_P^{\mathcal{O}G}(fe)\neq 0,$$

容易知道,e 和 f 是 Brauer 对应下的块.

(2) 在(2) 的情形下,我们有

$$\rho_{\mathrm{Ind}_H^G B}(e)\mathrm{ass}_G(\beta)=\mathrm{ass}_G(\beta),$$

并且

$$\rho_B(f)\beta=f\cdot\beta=\beta.$$

因为

$$\begin{aligned}
&\rho_{\mathrm{Ind}_H^G B}(f)(1_G \otimes_{\mathcal{O}H} \beta \otimes_{\mathcal{O}H} 1_G)\\
&= \Big(\sum_{t \in G/H} (ft \otimes_{\mathcal{O}H} 1_B \otimes_{\mathcal{O}H} t^{-1})\Big) \cdot (1_G \otimes_{\mathcal{O}H} \beta \otimes_{\mathcal{O}H} 1_G)\\
&= f \otimes_{\mathcal{O}H} \beta \otimes_{\mathcal{O}H} 1_G\\
&= 1_G \otimes_{\mathcal{O}H} f \cdot \beta \otimes_{\mathcal{O}H} 1_G\\
&= 1_G \otimes_{\mathcal{O}H} \beta \otimes_{\mathcal{O}H} 1_G.
\end{aligned}$$

由引理 2. 2. 2，得到

$$\rho_{\mathrm{Ind}_H^G B}(f)\beta = \beta.$$

那么

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\rho_{\mathrm{Ind}_H^G B}(e)\mathrm{ass}_G(\beta)\beta)\\
&= \mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\mathrm{ass}_G(\beta)\beta)\\
&= \mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\beta)\\
&= \mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\rho_{\mathrm{Ind}_H^G B}(f)\beta)\\
&\neq 0,
\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\rho_{\mathrm{Ind}_H^G B}(fe)) \neq 0.$$

又因为

$$C_{\mathrm{Ind}_H^G B}((\mathrm{Ind}_H^G B)^G) \subseteq \mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H),$$

我们有

$$\rho_{\mathrm{Ind}_H^G B}(I_P(\mathcal{O}G)) \subseteq I_P(\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)),$$

$\mathrm{Br}_P^{\mathcal{O}G}(fe) \neq 0$. 本证明完成.

定理 2. 1. 4 的证明：(1) 因为 B 是 A 的扩张 Green 对应，那么作为内 H- 代数我们设 $B \trianglelefteq iAi$，这里 i 是

$(\mathrm{Res}_H^G A)^H$ 的某个本原幂等元,它使得 $\mathrm{Br}_P^A(i) \neq 0$.

由此存在 A^H 的唯一的块 α,它也是 $C_A(A^H)$ 的块,并使得

$$\mathrm{Br}_P^A(\alpha) \neq 0$$

以及

$$i\alpha = \alpha i = i.$$

首先,容易得到 B 是内 H- 代数 $\alpha A\alpha$ 的嵌入局部内 H- 代数;其次,

$$P \leqslant_H D(\mathrm{ass}_H(1_A)).$$

最后,因为

$$\alpha \in (C_A(A^H))^H \subseteq (C_A(A^G))^P,$$

那么

$$\mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(\alpha \cdot 1_A) = \mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(\alpha) \neq 0.$$

由此,α 就是 $\mathrm{ass}_H(1_A)$.

(2) 与(1) 的证明类似.

我们回顾 G- 代数的(外) 张量积的概念:(A_i, ρ_i) 是一个 G_i- 代数,$i = 1,2$,那么 A_1 和 A_2 在 $\mathcal{O}$ 上的张量代数

$$A_1 \otimes_{\mathcal{O}} A_2$$

还是一个 $\mathcal{O}$- 代数,它按下面的方式得到一个 $G_1 \times G_2$- 作用:

$$^{(g_1,g_2)}a_1 \otimes a_2 = {}^{g_1}a_1 \otimes {}^{g_2}a_2,$$

$$(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2, a_1 \in A_1,$$

$$a_2 \in A_2.$$

按这个 $G_1 \times G_2$- 作用,

$$A_1 \otimes_{\mathcal{O}} A_2$$

作成一个 $G_1 \times G_2$- 代数, 在本书中, 称它为 G- 代数的 (外) 张量积.

为了下面的结论的需要, 我们将文献[21](Lemma 10.37)和文献[56](lemma 2.4.1)分别推广到有限秩自由 $\mathcal{O}$- 模和 $\mathcal{O}$- 代数的情形下, 也就是说, 得到了下面的引理 2.3.2 和推论 2.3.3.

引理 2.3.2　设 A_i 是一个 $\mathcal{O}$- 代数, 并且 M_i 和 N_i 都是 A_i- 格, $i = 1,2$. 那么:

$$\mathrm{Hom}_{A_1 \otimes A_2}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$$
$$= \mathrm{Hom}_{A_1}(M_1, N_1) \otimes \mathrm{Hom}_{A_2}(M_2, N_2),$$

特别地, 对于 G_i- 代数 $A_i, i = 1,2$, 作为 $A_1 \otimes A_2$ 的 $\mathcal{O}$- 子代数, 我们有

$$(A_1 \otimes A_2)^{G_1 \times G_2} = A_1^{G_1} \otimes A_2^{G_2}.$$

证明: 从下面的两个论断中我们知道引理 2.3.2 成立. 另外, 我们注意到, 对于 G_i- 代数 $A_i (i = 1,2)$,

$$A_i^{G_i} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}G_i}(\mathcal{O}, A_i).$$

论断 1　$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M_1, N_1) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M_2, N_2).$$

首先, 论断 1 的右边集合中的每个元素可以以一种自然的方式被看做是左边集合中的一个元素, 由此, 论断 1 是有意义的. 而且, 作为 $\mathcal{O}$- 模, 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M_1,N_1)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M_2,N_2)\\
&\cong(M_1^*\otimes N_1)\otimes(M_2^*\otimes N_2)\\
&\cong(M_1^*\otimes M_2^*)\otimes(N_1\otimes N_2)\\
&\cong(M_1\otimes M_2)^*\otimes(N_1\otimes N_2)\\
&\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M_1\otimes M_2,N_1\otimes N_2).
\end{aligned}$$

由文献[21](Proposition 10.30) 和下面的 $\mathcal{O}$- 模上的伴随函子同构式:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M_1\otimes M_2,\mathcal{O})&\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M_2,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M_1,\mathcal{O}))\\
&\cong M_1^*\otimes M_2^*.
\end{aligned}$$

这里

$$M_i^*:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M_i,\mathcal{O})$$

是 M_i 的对偶模($i=1,2$),论断 1 成立.

论断 2　$\mathrm{Hom}_{A_1\otimes A_2}(M_1\otimes M_2,N_1\otimes N_2)$

$$\subseteq\mathrm{Hom}_{A_1}(M_1,N_1)\otimes\mathrm{Hom}_{A_2}(M_2,N_2).$$

设 t 属于论断 2 的左边项,那么由论断 1,它能够被表达为

$$t=\sum_{i=1}^{n}u_i\otimes v_i,$$

n 是某个自然数,这里

$$u_i\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M_1,N_1)$$

和

$$v_i\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M_2,N_2)$$

使得

$$\{v_i, i = 1,2,\cdots,n\}$$

是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(M_2, N_2)$ 在 $\mathcal{F}$ 上的一组基.

对于每个 $a \in A_1$，我们有

$$(a \otimes 1)t = t(a \otimes 1),$$

那么

$$\sum_{i=1}^{n}(au_i - u_i a) \otimes v_i = 0,$$

由此，对于每个 i 和所有的 $a \in A_1$，$au_i = u_i a$. 我们可以重新写 t 为

$$t = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \otimes \mu_j,$$

对于某个自然数 m，这里

$$\lambda_j \in \mathrm{Hom}_{A_1}(M_1, N_1)$$

和

$$\mu_j \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(M_2, N_2)$$

使得

$$\{\lambda_j, j = 1,2,\cdots,m\}$$

是 $\mathrm{Hom}_{A_1}(M_1, N_1)$ 在 $\mathcal{F}$ 上的一组基. 与以上类似的推断表明每个 $\mu_j \in \mathrm{Hom}_{A_2}(M_2, N_2)$，由此

$$t \in \mathrm{Hom}_{A_1}(M_1, N_1) \otimes \mathrm{Hom}_{A_2}(M_2, N_2).$$

论断 2 得证.

推论 2.3.3　设 A_i 是一个 G_i- 代数，$i = 1,2$. 那么：

$$C_{A_1 \otimes A_2}((A_1 \otimes A_2)^{G_1 \times G_2}) = C_{A_1}(A_1^{G_1}) \otimes C_{A_2}(A_2^{G_2}).$$

特别地，

$$Z(A_1 \otimes A_2) = Z(A_1) \otimes Z(A_2).$$

证明：由引理 2.3.2 以及与引理 2.3.2 的论断 2 的证明类似的推断，我们知道推论 2.3.3 成立.

引理 2.3.4　设 A_i 是一个 G_i-代数，P_i 是 G_i 的 p-子群，$i = 1,2$. 那么作为 k-代数，我们有

$$(A_1 \otimes A_2)(P_1 \times P_2) \cong A_1(P_1) \otimes A_2(P_2).$$

证明：我们用下面的三个论断来完成本结论证明：

论断 1　对于 G_1 的子群 H_1 和 G_2 的子群 H_2：

$$(A_1 \otimes A_2)^{G_1 \times G_2}_{H_1 \times H_2} = (A_1)^{G_1}_{H_1} \otimes (A_2)^{G_2}_{H_2}.$$

论断 1 由引理 2.3.2 得到.

论断 2　$I_{P_1 \times P_2}(A_1 \otimes A_2) = I_{P_1}(A_1) \otimes A_2^{P_2} + A_1^{P_1} \otimes I_{P_2}(A_2)$.

由引理 2.3.2，论断 1 和文献[4]（Lemma 2.4）以及与文献[4]（Proposition 2.5）类似的推断，我们得到

$$\sum_{Q_1 < P_1, Q_2 < P_2} (A_1 \otimes A_2)^{P_1 \times P_2}_{Q_1 \times Q_2}$$

$$= \Big(\sum_{Q_1 < P_1} (A_1)^{P_1}_{Q_1}\Big) \otimes A_2^{P_2} + A_1^{P_1} \otimes \sum_{Q_2 < P_2} (A_2)^{P_2}_{Q_2},$$

那么再注意到引理 2.3.2，论断 2 成立.

论断 3　作为 k-代数：

$$(A_1^{P_1} \otimes A_2^{P_2}) / (I_{P_1}(A_1) \otimes A_2^{P_2} + A_1^{P_1} \otimes I_{P_2}(A_2))$$

$$\cong (A_1^{P_1}/I_{P_1}(A_1)) \otimes_k (A_2^{P_2}/I_{P_2}(A_2)),$$

$$a_1 \otimes a_2 + (I_{P_1}(A_1) \otimes A_2^{P_2} + A_1^{P_1} \otimes I_{P_2}(A_2))$$

$$\mapsto (a_1 + I_{P_1}(A_1)) \otimes_k (a_2 + I_{P_2}(A_2)),$$

对所有的 $a_1 \in A_1^{P_1}$ 和 $a_2 \in A_2^{P_2}$，由此 $(A_1 \otimes A_2)(P_1 \times P_2) \cong A_1(P_1) \otimes A_2(P_2)$.

论断 3 容易从文献[29](Proposition 2.1)和论断 2 得到.由此我们证明了引理 2.3.4.

我们注明，由引理 2.3.4，对于任意的 $a_1 \in A_1^{P_1}$ 和 $a_2 \in A_2^{P_2}$，我们总是将

$$\mathrm{Br}_{P_1 \times P_2}^{A_1 \otimes A_2}(a_1 \otimes a_2)$$

等同为

$$\mathrm{Br}_{P_1}^{A_1}(a_1) \otimes \mathrm{Br}_{P_2}^{A_2}(a_2).$$

我们在第 5 章将这个结论推广到广义 Brauer 构造的情形.

引理 2.3.5　设 H_i 是 G_i 的子群并且 B_i 是一个内 H_i-代数，$i = 1, 2$. 那么作为内 $G_1 \times G_2$-代数，

$$\mathrm{Ind}_{H_1}^{G_1} B_1 \otimes \mathrm{Ind}_{H_2}^{G_2} B_2 \cong \mathrm{Ind}_{H_1 \times H_2}^{G_1 \times G_2}(B_1 \otimes B_2)$$

证明：本结论容易从下面的同构映射得到：

$$(g_1 \otimes_{\mathcal{O}H_1} b_1 \otimes_{\mathcal{O}H_1} g'_1) \otimes (g_2 \otimes_{\mathcal{O}H_2} b_2 \otimes_{\mathcal{O}H_2} g'_2)$$

$$\longmapsto (g_1, g_2) \otimes_{\mathcal{O}(H_1 \times H_2)} (b_1 \times b_2) \otimes_{\mathcal{O}(H_1 \times H_2)} (g'_1, g'_2),$$

这里，

$$g_1, g'_1 \in G_1/H_1, g_2, g'_2 \in G_2/H_2, b_1 \in B_1, b_2 \in B_2.$$

定理 2.1.7 的证明：首先，由引理 2.3.2、文献[29](Corollary 3.3)和推论 2.3.3，我们知道 $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ 是

$$C_{A_1 \otimes A_2}((A_1 \otimes A_2)^{G_1 \times G_2})$$

的块，以及 $\beta_1 \otimes \beta_2$ 是

$$C_{B_1 \otimes B_2}((B_1 \otimes B_2)^{H_1 \times H_2})$$

的块.

（1）由定理 2.1.5，存在

$$C_{\mathrm{Res}_{H_1 \times H_2}^{G_1 \times G_2}(A_1 \otimes A_2)}((\mathrm{Res}_{H_1 \times H_2}^{G_1 \times G_2}(A_1 \otimes A_2))^{H_1 \times H_2})$$

的唯一的块

$$\mathrm{ass}_{H_1 \times H_2}(\alpha_1 \otimes \alpha_2),$$

即

$$C_{A_1}((A_1)^{H_1}) \otimes C_{A_2}((A_2)^{H_2})$$

的块

$$\mathrm{ass}_{H_1 \times H_2}(\alpha_1 \otimes \alpha_2),$$

使得

$$\mathrm{Br}_{P_1 \times P_2}^{C_{A_1 \otimes A_2}((A_1 \otimes A_2)^{G_1 \times G_2})}((\alpha_1 \otimes \alpha_2) \cdot \mathrm{ass}_{H_1 \times H_2}(\alpha_1 \otimes \alpha_2))$$
$$\neq 0.$$

此外，我们知道，对于每个 $i = 1, 2$，存在

$$C_{\mathrm{Res}_{H_i}^{G_i}(A_i)}((\mathrm{Res}_{H_i}^{G_i}(A_i))^{H_i})$$

的唯一的块 $\mathrm{ass}_{H_i}(\alpha_i)$，使得

$$\mathrm{Br}_{P_i}^{C_{A_i}(A_i^{G_i})}(\alpha_i \cdot \mathrm{ass}_{H_i}(\alpha_i)) \neq 0.$$

那么，由引理 2.3.4 和推论 2.3.3，我们有

$$\mathrm{Br}_{P_1}^{C_{A_1}(A_1^{G_1})}(\alpha_1 \cdot \mathrm{ass}_{H_1}(\alpha_1)) \otimes_k \mathrm{Br}_{P_2}^{C_{A_2}(A_2^{G_2})}(\alpha_2 \cdot \mathrm{ass}_{H_2}(\alpha_2))$$
$$= \mathrm{Br}_{P_1 \times P_2}^{C_{A_1 \otimes A_2}((A_1 \otimes A_2)^{G_1 \times G_2})}((\alpha_1 \otimes \alpha_2) \cdot$$
$$(\mathrm{ass}_{H_1}(\alpha_1) \otimes \mathrm{ass}_{H_2}(\alpha_2)))$$

$$\neq 0,$$

由此,(1) 从

$$\mathrm{ass}_{H_1\times H_2}(\alpha_1\otimes\alpha_2)$$

的唯一性和文献[29](Corollary 3.3)得到

(2) 由定理 2.1.5,存在

$$C_{\mathrm{Ind}_{H_1\times H_2}^{G_1\times G_2}(B_1\otimes B_2)}((\mathrm{Ind}_{H_1\times H_2}^{G_1\times G_2}(B_1\otimes B_2))^{G_1\times G_2})$$

的唯一的块

$$\mathrm{ass}_{G_1\times G_2}(\beta_1\otimes\beta_2),$$

由引理 2.3.5 和推论 2.3.3,它也是

$$C_{\mathrm{Ind}_{H_1}^{G_1}B_1}(\mathrm{Ind}_{H_1}^{G_1}B_1)^{G_1}\otimes C_{\mathrm{Ind}_{H_2}^{G_2}B_2}(\mathrm{Ind}_{H_2}^{G_2}B_2)^{G_2}$$

的块,使得

$$\mathrm{Br}_{P_1\times P_2}^{\mathrm{Ind}_{H_1\times H_2}^{G_1\times G_2}(C_{H_1\times H_2}(B_1\otimes B_2))^{H_1\times H_2}}(\mathrm{ass}_{G_1\times G_2}(\beta_1\otimes\beta_2)\cdot(\beta_1\otimes\beta_2))$$
$$\neq 0.$$

此外,我们知道,对于每个 $i=1,2$,存在

$$C_{\mathrm{Ind}_{H_i}^{G_i}B_i}((\mathrm{Ind}_{H_i}^{G_i}B_i)^{G_i})$$

的唯一的块 $\mathrm{ass}_{G_i}(\beta_i)$,使得

$$\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_{H_i}^{G_i}C_{B_i}(B_i)^{H_i}}(\mathrm{ass}_{G_i}(\beta_i)\beta_i)\neq 0.$$

那么由引理 2.3.4、推论 2.3.3 和引理 2.3.5 我们得到

$$\mathrm{Br}_{P_1\times P_2}^{\mathrm{Ind}_{H_1\times H_2}^{G_1\times G_2}(C_{H_1\times H_2}(B_1\otimes B_2))^{H_1\times H_2}}((\mathrm{ass}_{G_1}(\beta_1)\otimes\mathrm{ass}_{G_2}(\beta_2))\cdot$$
$$(\beta_1\otimes\beta_2))\neq 0.$$

本证明完成.

第3章　局部内 G-代数上的覆盖关系

3.1　研究背景介绍

块覆盖和 Brauer 对应是刻画群的块和它的子群的块之间的关系的有力工具,许多作者研究过群和它的子群的块之间的关系(文献[7]、[59]、[24]、[30]、[43]、[57]).

在文献[7]中,作者将块代数看做是对应的群代数上的双边模,并给出块覆盖和 Brauer 对应在模论形式下的定义:

定义3.1.1(1) 设 $H \leqslant G$, $b(=\mathcal{O}He_b)$ 是群 H 的一个块代数,如果存在群 G 的唯一的块代数 $B(=\mathcal{O}Ge_B)$,使得 $b \mid \mathrm{Res}_{H\times H}^{G\times G}B$,那么我们称块 e_B 是块 e_b 的 Brauer 对应.

(2) 设 $H \leqslant G$, $b(=\mathcal{O}He_b)$ 是群 H 的一个块代数,如果存在群 G 的块代数 $B(=\mathcal{O}Ge_B)$ 使得 $b \mid \mathrm{Res}_{H\times H}^{G\times G}B$,那么

我们称块 e_B 覆盖块 e_b.

由此得知，群和它的正规子群的块代数的覆盖关系比块代数的 Brauer 对应关系稍弱. 应用这两个定义，作者得到了 Brauer 对应和块覆盖的一些性质. 事实上，在 $C_G(D(e_b)) \leqslant H$ 情况下，上述 Brauer 对应的定义与我们在第 2 章给出的 Brauer 对应的定义是一致的，并且在 $H \trianglelefteq G$，$\mathcal{O}=k$ 情况下，上面的块覆盖的定义和块覆盖的下述定义是一致的，它们都等价于 $e_Be_b \neq 0$.

定义 3.1.2　设 $H \lhd G$，$B(=kGe_B)$ 和 $b(=kGe_b)$ 分别是 G 和 H 的块代数，我们称块 e_B 覆盖块 e_b，如果存在属于 B 的不可分解模 U 使得 $\mathrm{Res}_H^G U$ 有一个直因子属于 b（文献[5]、[20]）.

在文献[20]中，Collins 用上述块覆盖的定义讨论了块覆盖一些性质，并得到了 Brauer 第三主要定理的简化证明.

在文献[24]中，继续将块看成是所在的群代数上的双边模，Fan 统一和推广了许多关于块覆盖和模覆盖的结论.

文献[57]在文献[25]的基础上进一步讨论了 Brauer 对应，得到了下面的刻画：

如果块代数 $b(=kGe_b)$ 在 FG 作为 $k(H\times H)$- 模的分解中的重数是 1，那么块 e_b 的 Brauer 对应块存在.

在文献[30]中作者得到了下面的结论：

设$N\trianglelefteq G$，$H=N_G(D)$，$b(=kNe_b)$是群N的一个亏群为D的块代数，$b_1(=kNe_{b_1})$是块代数b在群$H\cap N$中的Brauer对应下的块代数。那么从群H的块到群G的块之间的Brauer对应是群H的覆盖eb_1的块和群G的覆盖e_b的块之间的一一对应，并且该对应保持相对应的块的亏群。

在文献[6]中，Alperin给出了上面的结论的模论形式及其证明：

设$H\trianglelefteq G$，$K=N_H(D)$，$L=N_G(D)$，并设e_b是H的一个亏群为D的块，e_{b_1}是它在K中的Brauer对应下的块。那么存在一个G的覆盖e_b的块和L的覆盖的e_{b_1}块之间的一一对应。

另外，Murai在文献[53]中给出了该结论的另一个模论证明。

在文献[6]中，Alperin给出了下面的模覆盖的定义：

设$H\trianglelefteq G$，V是一个kG-模并且U是一个kH-模，如果$U\mid \mathrm{Res}_H^G V$并且$Vtx(U)=_G Vtx(V)\cap H$。那么我们称V覆盖U。

应用上面的模覆盖的定义，平行于上述文献[30]中的结论，他得到了下面的模论形式的结论：

设Q是群G的一个p-子群，$Q\leqslant H\trianglelefteq G$，$K=N_H(Q)$，$L=N_G(Q)$，又设$V$是顶为$Q$的不可分解$kH$-模并且不可

分解 kK- 模 W 是它的 Green 对应. 那么存在一个覆盖 V 的不可分解 kG- 模的同构类和覆盖 W 的不可分解 kL- 模的同构类之间的一一对应.

本章在上述研究的基础上,综合块覆盖和模覆盖的概念,提出局部 G- 代数覆盖的概念. 我们首先检验了局部 G- 代数覆盖的概念,然后借用扩张 Green 对应,将上述块覆盖(文献[30])和模覆盖(文献[6])的结论推广到局部内 G- 代数上去.

3.2　局部内 G- 代数覆盖的定义

定义 3.2.1　设 $H \lhd G$, A 是一个局部内 G- 代数, C 是一个局部内 H- 代数. 我们称局部内 G- 代数 A 覆盖局部内 H- 代数 C, 如果 C 是 A 的嵌入内 H- 代数并且

$$D(C) =_G H \cap D(A).$$

注 3.2.2　$H \lhd G$, 由本章第 3.3 节中的引理 3.3.1, 在 G- 共轭意义下, 因为内 H- 代数的任何嵌入代数 $\mathrm{Res}_H^G(A)$ 存在含于 $H \cap D(A)$ 中的亏群, 由此定义 3.2.1 是有意义的. 并且第 3.3 节中的主要结论说明, 局部内 G- 代数上的覆盖关系是的解存在的. 容易观察到, H 是正规子群时的扩张 Green 对应是一种特殊的局部内 G- 代数上的覆盖关系. 事实上, 由 Higman 引理(文献[56]Theorem 4.2.2), 局部内 G- 代数上的覆盖关系包

含了第 3.1 节中的模覆盖的情形.

另外,从群论的角度看,上述定义即是推广了事实:如果 $H\trianglelefteq G$,那么 G 的 Sylow p-子群与 H 的交作成 H 的 Sylow p-子群.

参见文献[56](Theorem 5.10.12)我们得到下面的关于 Brauer 对应的结论:

引理 3.2.3 设 $B(=\mathcal{O}Ge_B)$ 和 $b(=\mathcal{O}He_b)$ 分别是群 G 和群 H 的块(代数),$C_G(D(b))\leq H$. 那么

(1) b 在 $\mathrm{Res}^{G\times G}_{H\times H}B$ 的不可分分解中出现的重数是 1;

(2) 如果 $b\mid \mathrm{Res}^{G\times G}_{H\times H}B$,那么 e_B 是 e_b 的 Brauer 对应块.

性质 3.2.4 设 (A,ρ_A) 是一个属于 G 的块 $B(=\mathcal{O}e_B)$ 的局部内 G-代数,(C,ρ_C) 是一个属于 H 的块 $b(=\mathcal{O}e_b)$ 的局部内 H-代数,这里 $H\leq G$.

(1) 如果 $C_G(D(e_b))\leq_G H$ 并且 C 是 A 的一个嵌入内 H-代数,那么在定义 3.1.1(2) 的意义下,B 覆盖 b.

(2) 如果 $\mathcal{O}=k$,$H\trianglelefteq G$ 并且 A 覆盖 C,那么在定义 3.1.2 的意义下,B 覆盖 b.

证明:在内 H-代数同构意义下,设 $(C,\rho_C)=(iAi,\rho_{iAi})$,这里 $\rho_{iAi}(h)=\rho_A(h)i$,i 是 A^H 的本原幂等元.

因为 A 属于 G 的块 B,C 属于 H 的块 b,我们有

$$\rho_A(e_B)=1_A,\rho_A(e_b)=\rho_{iAi}(e_b)=i,$$

这里,e_B 和 e_b 分别是 B 和 b 的单位元,那么

$$\rho_A(e_B e_b) = i, e_B e_b \neq 0.$$

如果

$$C_G(D(b)) \leqslant_G H,$$

因为 $e_B e_b \neq 0$，由引理 3.2.3，b 仅仅是 $\mathrm{Res}_{H \cdot H}^{G \cdot G} B$ 的直因子，即在定义 3.1.1(2) 的意义下，B 覆盖 b.

如果 $H \trianglelefteq G$，因为 $e_B e_b \neq 0$，显然，在定义 3.1.2 的意义下 e_B 覆盖 e_b.

注 3.2.5　在性质 3.2.4 中，设 A 和 C 分别是 B 和 b，那么限定在块（代数）上，在共同的情形下，定义 3.2.1 不弱于定义 3.1.1(2) 或定义 3.1.2.

性质 3.2.6　设 A 是局部内 G- 代数，C 是局部内 H- 代数，这里 $H \trianglelefteq G$. 如果 A 覆盖 C，那么 A 覆盖 C 的每个 G- 共轭内 H- 代数 ${}^gC$.

证明：在内 H- 代数同构的意义下，设 $C = iAi$，这里 i 是 A^H 的亏群为 D 的本原幂等元，这里 i 的亏群是指它所在的点的亏群，由此，${}^gi$ 也是 $A^H = A^{({}^gH)}$ 的亏群为 ${}^gD$ 的本原幂等元，对于任意的 $g \in G$. 容易知道存在 $({}^gi)A({}^gi)$ 和 C 的 G- 共轭内 H- 代数 ${}^gC$ 之间的典型的内 H- 代数同构，以及

$$D(A) \cap H =_G D({}^gC),$$

由此 A 覆盖 C 的每个 G- 共轭 ${}^gC$.

推论 3.2.7　设 B 是 G 的块，b 是 H 的块，这里 $H \trianglelefteq G$. 那么在定义 3.2.1 的意义下，如果 B 覆盖 b，那么 B

恰好覆盖 b 的全部 G- 共轭.

证明：容易由注 3.2.5 和性质 3.2.6 得到.

上述推论 3.2.7 推广了文献[48](Lemma 2.1(i)).

3.3　本章的主要结论及其证明

本章的主要结论是定理 3.3.3、定理 3.3.4 和定理 3.3.6. 定理 3.3.3 和定理 3.3.4 说明我们提出的局部内 G- 代数上的覆盖关系是客观存在的. 定理 3.3.6 推广了 3.1 节中关于模覆盖和块覆盖的结论到局部内 G- 代数上去, 从而提供了与扩张 Green 对应的一种相容性.

引理 3.3.1　设 A 是一个局部内 G- 代数, $H\leqslant G$.

(1) 如果 B 是 A 的嵌入局部内 H- 代数, 那么

$$D(B)\leqslant_G D(A).$$

(2) 如果 B 是局部内 H- 代数, 使得 A 是 $\mathrm{Ind}_H^G B$ 的嵌入内 G- 代数, 那么

$$D(A)\leqslant_G D(B).$$

(3) 如果 $D(A)\leqslant_G H$, 那么存在 A 的某个嵌入局部内 H- 代数 B 使得 A 是 $\mathrm{Ind}_H^G B$ 的嵌入内 G- 代数.

证明：参见文献[32](Theorem 3.2、Corollary 3.9)和文献[61](Lemma 3.8).

引理 3.3.2　设 A 是一个 H- 投射的局部内 G- 代数.

如果 $H \trianglelefteq G$，那么 A 的嵌入局部内 H- 代数是两两 G- 共轭的，并且在 G- 共轭的意义下，它们有亏群 $D(A)$.

证明：因为 A 是 H- 投射的，A 是某个局部内 H- 代数 C 的诱导内 G- 代数 $\mathrm{Ind}_H^G C$ 的嵌入内 G- 代数. 这里由引理 3.3.1，

$$D(C) =_G D(A),$$

由此，A 的每个嵌入局部内 H- 代数也是 $\mathrm{Ind}_H^G C$ 的嵌入内 H- 代数.

由 $H \trianglelefteq G$ 以及引理 2.2.2，我们得到下面的内 H- 代数同构：

$$^{g}C \cong g \otimes_{\mathcal{O}H} C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}.$$

对于任意的 g 属于 H 在 G 中的某个陪集 T，这里

$$g \otimes_{\mathcal{O}H} C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$$

通过限制 $\mathrm{Ind}_H^G C$ 的结构同态到 $\mathcal{O}H$，被看做是 $\mathrm{Ind}_H^G C$ 的 $\mathcal{O}$- 子代数.

那么，容易得知，

$$1_{\mathrm{Ind}_H^G C} = \sum_{g \in T} g \otimes_{\mathcal{O}H} 1_C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1},$$

以及

$$g \otimes_{\mathcal{O}H} 1_C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$$

是局部内 H- 代数

$$g \otimes_{\mathcal{O}H} C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$$

的单位元，因此是 $(\mathrm{Ind}_H^G C)^H$ 的本原幂等元，对于任意的 $g \in T$，由文献[66](Proposition 4.12).

由此，

$$\{g\otimes 1_C\otimes g^{-1}, g\in T\}$$

是 $1_{\mathrm{Ind}_H^G C}$ 的一个本原正交分解，我们知道，在内 H- 代数同构的意义下，

$$\{{}^gC, g\in T\}$$

是 $\mathrm{Ind}_H^G C$ 的全部的嵌入局部内 H- 代数，因此 A 的嵌入局部内 H- 代数是相互 G- 共轭的. 本证明完成.

定理 3.3.3 设 A 是局部内 G- 代数，并且 C 是 A 的嵌入局部内 H- 代数，这里

$$D(A)\leqslant K\leqslant H\leqslant G,$$

以及 $K\trianglelefteq G$. 那么

$$D(A)=_G D(C),$$

特别地，如果

$$D(A)\leqslant H\trianglelefteq G,$$

那么 A 覆盖它的每个嵌入局部内 H- 代数.

证明：首先，由引理 3.3.1，我们有

$$D(C)\leqslant_G D(A)\leqslant K.$$

因为 $K\trianglelefteq G$，由引理 3.3.2，我们设 C' 是 C 的嵌入局部内 K- 代数，它也是 A 的嵌入内 K- 代数，并且

$$D(C')=_G D(A).$$

再由引理 3.3.1，因为 $K\trianglelefteq H$，我们有

$$D(C')=_H D(C),$$

因此

$$D(A) =_G D(C).$$

证明完成.

定理 3.3.4　设 C 是一个亏群为 D 的局部内 H- 代数，这里 D 是 G 的正规子群，如果 $H \trianglelefteq G$，那么 D 也是 $\mathrm{Ind}_H^G C$ 的每个嵌入局部内 G- 代数 A 的亏群，由此 A 覆盖 C.

证明：因为 $H \trianglelefteq G$ 以及由引理 2.2.2，我们有下面的内 H- 代数同构：

$${}^g C \cong g \otimes_{\mathcal{O}H} C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1},$$

对于任意的 g 属于 H 在 G 中的某个陪集代表系 T，这里

$$g \otimes_{\mathcal{O}H} C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}.$$

通过限制 $\mathrm{Ind}_H^G C$ 的结构同态到 $\mathcal{O}H$，被看做是 $\mathrm{Ind}_H^G C$ 的 $\mathcal{O}$- 子代数.

那么容易得到

$$1_{\mathrm{Ind}_H^G C} = \sum_{g \in T} g \otimes_{\mathcal{O}H} 1_C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1},$$

$$g \otimes_{\mathcal{O}H} 1_C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$$

是局部内 H- 代数

$$g \otimes_{\mathcal{O}H} C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$$

的单位元，并且是 $(\mathrm{Ind}_H^G C)^H$ 的本原幂等元，对于任意的 $g \in T$.

因为 D 是 C 的亏群，设 $1_C = \mathrm{Tr}_D^H(c)$，那么

$$1_{1\otimes C\otimes 1} = \mathrm{Tr}_D^H(1_{1\otimes C\otimes 1}), c \in C^D,$$

因此

$$1_{g\otimes C\otimes g^{-1}} = \mathrm{Tr}^{{}^gH}_{{}^gD}({}^g(1\otimes c\otimes 1)) = \mathrm{Tr}^H_D(g\otimes c\otimes g^{-1}.$$

现在,容易由 Mackey 分解公式知道

$$1_{\mathrm{Ind}_H^G C} = \sum_{g\in T} g\otimes 1_C\otimes g^{-1} = \mathrm{Tr}_D^G(1\otimes c\otimes 1).$$

既然 A 是 $\mathrm{Ind}_H^G C$ 的嵌入局部内 G-代数,在内 G-代数同构的意义下,我们设

$$A = i(\mathrm{Ind}_H^G C)i,$$

这里 i 是 $(\mathrm{Ind}_H^G C)^G$ 的一个本原幂等元. 由文献[66](Theorem 4.1),在 $(\mathrm{Ind}_H^G C)^H$ 的某个可逆元素的共轭的意义下,对于某个 $g\in T$,它有下面的有限本原正交分解:

$$i = g\otimes 1_C\otimes g^{-1} + \cdots$$

因为

$$i = \mathrm{Tr}_D^G(i(1\otimes c\otimes 1)i),$$

我们得到 A 是 D-投射的.另外,

$$g\otimes C\otimes g^{-1}$$

是 $\mathrm{Res}_H^G A$ 的一个嵌入 ${}^gH$-代数,由此 D 是 A 的亏群,同时,A 覆盖 ${}^gC$,由此也覆盖 C.

下面的引理 3.3.5 就是著名的 Burry-Carlson-Puig 定理(文献[66]Theorem 20.4),为了我们这里的使用,通过模仿文献[19]中的方法,现给出该定理的内 G-代数版本.

引理 3.3.5　设 D 是有限群 G 的一个 p- 子群，H 是 G 的一个子群，使得 $N_G(D)\leqslant H$. 如果 A 是一个局部内 G- 代数并且内 H- 代数 $\mathrm{Res}^G_H(A)$ 有一个亏群为 D 的嵌入局部内 H- 代数 C，那么 D 是 A 的亏群并且 A 恰是 C 的扩张 Green 对应.

证明：设 $T=\{D^t\cap H \mid t\in H\}$，$I=\sum_{Q\in T}A^G_Q$；显然，$T$ 中的每个群都是 D 的真子群. 由此，由 Mackey 分解公式，下面的映射是代数满同态：

$$f:A^G_D\to(A^H_D+I)/I,\mathrm{Tr}^G_D(a)\mapsto\mathrm{Tr}^H_D(a)+I.$$

在内 H- 代数同构的意义下，我们设 $C=iAi$，这里 i 是 A^H 的本原幂等元，使得 $i\notin I$，但是 $i\in C^H_D$，由此 $i\in A^H_D$，那么存在某个 $a\in A^G_D$，使得

$$f(a)=i+I.$$

因为 A^G 是一个局部环，我们知道

$$a+\mathrm{Ker}(f)$$

是一个非零幂等元并且是在 $A^G/\mathrm{Ker}(f)$ 中可逆的，因此在 A^G 中 a 是可逆的，并且我们有

$$A^G=A^G\cdot a\leqslant A^G_D.$$

那么 $1_A\in A^G_D$，以及 D 是 A 的亏群. 同时由文献[32]，A 是 C 的扩张 Green 对应.

在下面的定理 3.3.6 中，我们设定 D 是 H 的 p- 子群，这里 $H\lhd G$，设 $K=N_H(D)$ 并且 $L=N_G(D)$. 设定亏群为 D 的一个局部内 H- 代数 A，以及它的扩张 Green 对应

C，C 是一个亏群为 D 的局部内 K-代数.

定理 3.3.6　扩张 Green 对应提供了一个覆盖 A 的局部内 G-代数同构类和覆盖 C 的局部内 L-代数同构类之间的一一对应.

证明：现在，用扩张 Green 对应的方法，我们给出一个从覆盖 C 的局部内 L-代数到某个覆盖 A 的局部内 G-代数之间的一一对应.

设 M 是亏群为 P 的覆盖 C 的局部内 L-代数，使得 $P \cap K = D$. 容易知道

$$P \cap H = D, \quad N_G(P) \leqslant L$$

以及 C 是 $\mathrm{Res}_K^L M$ 的嵌入内 K-代数.

设局部内 G-代数 N 是 M 的扩张 Green 对应，那么 C 是 $\mathrm{Res}_K^G N$ 的嵌入 K-代数，故由引理 3.3.5，N 覆盖 A.

由上述构造方法，我们得到 M 的一个对应 N，因为 N 覆盖 A，这里 N 在内 G-代数同构的意义下是唯一的. 下面，我们证明这个对应在相对应的同构类的意义下是一一对应的.

设 N 是一个覆盖 A 的局部内 G-代数，P 是 N 的亏群，它使得

$$P \cap H = D,$$

那么

$$N_G(P) \leqslant L.$$

由扩张 Green 对应，存在内 L-代数 M 和内 HL-代数 W 使

得 $\{N,W,M\}$ 中的任何两个在扩张 Green 对应意义下是对应的.

因为由上述的覆盖关系和扩张 Green 对应, $H \lhd G$ 以及 A 是

$$\mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_{HL}^G W$$

的嵌入内 H- 代数, 存在某个本原幂等元 $i \in W^H$, 使得作为内 H- 代数,

$$A \cong g \otimes_{\mathcal{O}HL} iWi \otimes_{\mathcal{O}HL} g^{-1},$$

这里 $g \in G/H$, 并且我们设 $g = 1$, 如果 $g \in HL$. 由此

$$\begin{aligned} D &=_H D(A) \\ &=_H D(g \otimes_{\mathcal{O}HL} iWi \otimes_{\mathcal{O}HL} g^{-1}) \\ &\leqslant_H gPg^{-1} \cap H \\ &= gQg^{-1}, \end{aligned}$$

由于 $g \in HL$, $g = 1$. 我们得到 A 是 $\mathrm{Res}_H^{HL} W$ 的嵌入代数.

因为

$$HL/L \cong H/H \cap L = H/K,$$

由引理 2. 2. 2, 我们有下面的 $\mathcal{O}$- 代数同构:

$$\mathrm{Res}_H^{HL} \mathrm{Ind}_L^{HL} M \cong \mathrm{Ind}_K^H \mathrm{Res}_K^L M,$$

并且容易得知该同构是内 H- 代数同构. 那么显然, A 是

$$\mathrm{Ind}_K^H \mathrm{Res}_K^L M$$

的嵌入内 H- 代数.

因为 $P \cap K = D$ 和 $D \trianglelefteq L$, 存在 $\mathrm{Res}_K^L M$ 的某个嵌入局部 K- 代数 C', 并且

$$D(C') = D,$$

同时使得 A 是 $\mathrm{Ind}_K^H C'$ 的嵌入内 H-代数，由引理3.3.1和文献[32](Lemma 3.13)，由此由扩张 Green 对应，作为内 K-代数，$C \cong C'$，即 M 覆盖 C．证明完成．

第 4 章　G- 代数的广义膨胀

4.1　研究背景

膨胀方法是一个自然的方法,它被用来分析群代数上的模和它的因子群所对应的群代数上的模之间的关系,许多作者研究过模和代数上的膨胀方法(文献[39]、[48]、[40]、[47]).

比如,文献[39]给出了膨胀模是投射模的判断条件:

设 $N \trianglelefteq G$,V 是非零 $F(G/N)$- 模,那么下面的结论是等价的:

(1) $\inf(V)$ 是投射 FG- 模;

(2) 域 F 的特征不整除群 N 的阶并且 V 是投射 $F(G/N)$- 模.

Ikeda 在文献[40]中给出了膨胀 G- 代数的亏群的刻画:

设 A 是一个局部内 G/N- 代数,$D \leqslant G$,D/N 是 A 的亏群,那么 D 的 Sylow p- 子群是 $\mathrm{inf}(A)$ 的亏群(文献[48]、[40]).

Karpilovsky 在文献[48]中将上面的结论推广为:

设 N 是有限群 G 的一个正规子群,A 是一个内 G/N-代数,e 是 $A^{G/N}$ 的一个本原幂等元.如果 D/N 是 e 所在的点在 G/N 中的亏群,那么 D 的 Sylow p- 子群是 e 作为 $\mathrm{inf}(A)$ 的一个本原幂等元所在的点在 G 中的亏群.

应用膨胀方法,群代数上的模和它的因子群所对应的群代数上的模之间的许多关系,以及它们的不可约模的特征标之间的许多关系都已经被研究和揭示了.同样地,用这种方法,群的块代数和它的因子群的块代数之间的许多关系也越来越清楚了.不仅如此,通过膨胀方法,我们还可以扩张一个正规子群上的不可约模到纽群代数上去(文献[46]),可以借用膨胀模将群上的不可约单模表达为子群上的模的诱导(文献[44]),以及结合模的膨胀方法用 Heller 算子提供一个构造 p- 群上的 Endo-permutation 模的方法(文献[66]).

在对膨胀方法进行研究过程中,下面的一类情况逐渐引起我们的注意:

如果 $H \trianglelefteq G$,M 是一个不可分解 FG- 模,并且 $\mathrm{Res}_H^G M$ 是一个不可分解 FH- 模,N 是一个 $F(G/H)$- 模,那么

$$M \otimes_F \mathrm{inf}(N)$$

作成了一个 FG- 模.

显然,在 M 是平凡 FG- 模的情况下,$M \otimes_F \inf(N)$ 就是通常的膨胀模. 这种形式的模已经被许多作者所研究,我们按它出现在文献中的先后顺序列举如下:

在文献[46]中,Karpilovsky 给出了下面的结论:

设 N 是有限群 G 的一个正规子群,F 是任意的一个域.V 是一个 $F^{\alpha}G$- 模,那么对于 $F^{\beta}(G/N)$- 模 U,U_1,U_2,下面的结构成立:

(1) 如果 V_N 是全不可分解的并且 U 是不可分解的,那么

$$\inf(U) \otimes_F V$$

是不可分解的 $F^{\gamma}G$- 模,这里 $\gamma = (\inf\beta)\alpha$.

(2) 如果 V_N 是绝对不可约的并且 U 是不可约的,那么

$$\inf(U) \otimes_F V$$

是不可约的 $F^{\alpha}G$- 模.

(3) 如果 V_N 是全不可分解的并且

$$\inf(U_1) \otimes_F V = \inf(U_2) \otimes_F V,$$

那么 $U_1 \cong U_2$.

(4) 如果 V_N 是绝对不可约的,那么

$$\inf(U) \otimes_F V$$

是绝对不可约的,当且仅当 U 是绝对不可约的.

正如作者所说的,这个结果本质上来源于文献

[38],并出现在文献[39]中,是推广文献[39]中的对应结论($\alpha=1$ 的情形)到组群代数上的模的情形而得到的.

Kulshammer 在文献[50]中研究了这种形式的模的亏群,给出了下面的结论:

设 F 是一个特征为素数 p 的代数封闭域,G 是一个有限群,H 是 G 的一个正规子群.又设 M 是一个不可分解 FG-模,并且 $\mathrm{Res}_H^G M$ 是一个不可分解 FH-模,N 是一个不可分解 $F(G/H)$-模.那么

$$\inf(M)\otimes_F N$$

是一个不可分解 FG-模,而且如果 U 是

$$\inf(M)\otimes_F N$$

的项,那么 UH/H 是 N 的项.

这种形式的模也被其他的作者所研究,比如在文献[53]、[54]中,Murai 用这种形式的模推广块控制的概念为 V-控制,得到了群代数的块的亏群和它所 V-控制的因子群的块的亏群之间的关系,并进一步得到了下面的结论:

设 B 是群 G 的亏群为 D 的块,$N\lhd G$.那么存在 G/N 的亏群为 DN/N 块被 B V-控制,而且 G/N 的这种块的个数等于群 $N_G(D)N$ 的块 $\tilde{B}^{N_G(D)N}$ 所控制的群 $N_G(D)N/N$ 的亏群为 DN/N 的块的个数,这里 $\tilde{B}$ 是 B 在群 $N_G(D)$ 中的 Brauer 对应块.

在这一章中，我们在上述模和 G- 代数的膨胀方法的基础上，借助 G- 代数的（内）张量积方法，我们提出"广义膨胀 G- 代数"这个概念，并推广了模上的相应的结论，得到了广义膨胀 G- 代数是局部 G- 代数的充要条件，并用广义膨胀方法进一步讨论群的块和它的因子群的块之间的若干关系，同时，我们也得到了关于广义膨胀 G- 代数的亏群的一个刻画。

4.2　定义和主要结论

在本章中，我们设定 $\mathcal{O}=k$ 是一个特征为素数 p 的代数封闭域，N 总是有限群 G 的一个正规子群。

设 (C,ϕ) 是一个 G/N- 代数，按文献[66]，(C,ϕ) 的膨胀 G- 代数是一个 G- 代数

$$(\inf(C),\inf(\phi)),$$

这里

$$\inf(C)=C,\quad (\inf(\phi))(g)=\phi(gN),\quad g\in G.$$

明显地，如果 (C,ϕ) 是局部 G/N- 代数，那么 $(\inf(C),\inf(\phi))$ 是一个局部 G- 代数，并且，如果 (C,ρ) 是一个内 G/N- 代数，那么

$$(\inf(C),\inf(\rho))$$

也是一个内 G- 代数。

(A_1,ϕ_1) 和 (A_2,ϕ_2) 都是 G- 代数，在本章中，它们

的(内)张量 G-代数指的是 G-代数$(A_1 \otimes A_2, \phi)$,此时

$$\phi(g) := \phi_1(g) \otimes \phi_2(g), g \in G.$$

特别地,两个内 G-代数 A_1, A_2 的(内)张量 G-代数仍是一个内 G-代数,它的结构同态如下:

$$\rho_{A_1 \otimes A_2}(g) = \rho_{A_1}(g) \otimes \rho_{A_2}(g), g \in G.$$

我们注明,在本章中,$\otimes$ 总是表示 $\otimes_k$ 的简写.

设 A 是一个 G-代数,同时,$\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部 N-代数,我们称(内)张量 G-代数 $A \otimes \inf(C)$ 是 G/N-代数 C 的广义膨胀 G-代数.我们知道当 A 是平凡 G-代数 k 时,C 的广义膨胀 G-代数 $A \otimes \inf(C)$ 就是通常的膨胀 G-代数,而且,如果 A 是内 G-代数以及 C 是内 G/N-代数,则 $A \otimes \inf(C)$ 也是一个内 G-代数.

我们回忆局部内 G-代数 A 从属于群 G 的某个块(代数)$B(=kGe_B)$ 是指 $\rho_A(e_B) = 1_A$(文献[40]).以及群 G 的块(代数)$B(=kGe_B)$ 覆盖群 N 的块(代数)$b(=kNe_b)$,当且仅当 $e_Be_b \neq 0$(文献[20]).

$N \trianglelefteq G$,下面的自然的 k-代数同态,即是群 G 相对于群 N 的增广同态(文献[51]):

$$\mu_{G/N}: kG \to k(G/N), \sum_{g \in G} t_g g \mapsto \sum_{g \in G} t_g \bar{g}, t_g \in k.$$

对于 G 的块 e_B,我们知道 $\mu_{G/N}(e_B)$ 是 $k(G/N)$ 的一个中心幂等元,在该中心幂等元是非零幂等元的情况下,我们称块(代数)$B(=kGe_B)$ 控制 G/N 的块(代数)$\bar{b}(=k(G/N)e_{\bar{b}})$,如果 $e_{\bar{b}}$ 出现在 $\mu_{G/N}(e_B)$ 在

$Z(k(G/N))$ 中的唯一分解中.

下面我们给出本章的主要结论.

定理4.2.1 设 A 是一个 G-代数,并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部 N-代数,那么 G/N-代数 C 的广义膨胀 G-代数

$$A \otimes_k \inf(C)$$

是一个局部 G-代数当且仅当 C 是一个局部 G/N-代数.

显而易见,定理4.2.1推广了下面的两个事实:

(1) G/N-代数 C 是局部 G/N-代数当且仅当 C 的膨胀 G-代数 $\inf(C)$ 是局部 G-代数;

(2) $A \otimes_k C$ 是一个局部代数当且仅当 A 和 C 都是局部代数.

性质4.2.2 设 A 是一个内 G-代数,并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个属于 N 的块 b 的局部内 N-代数,又设 C 是一个局部内 G/N-代数.如果广义膨胀内 G-代数

$$A \otimes_k \inf(C)$$

属于 G 的块 B,那么 B 覆盖 b.

推论4.2.3 设 C 是一个属于 G/N 的块 b 的局部内 G/N-代数,并且膨胀内 G-代数 $\inf(C)$ 属于 G 的块 B.那么 B 覆盖 N 的主块并且控制 b,特别地,G 的主块覆盖 N 的主块并且控制 G/N 的主块.

定理4.2.4 设 A 是属于 G 的块 B 的内 G-代数,并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部内 N-代数.那么存在平凡内 N-代数 k 的诱导内 G-代数 $\mathrm{Ind}_N^G k$ 作为 G/N-代数的某个嵌

入局部内 G/N- 代数 C 的广义膨胀内 G- 代数

$$A \otimes_k \inf(C)$$

属于 B.

定理 4.2.4 推广了事实:G 的主块总是控制 G/N 的某个块,以及总存在平凡 kN- 模 k 的诱导 kG- 模的某个不可分解直因子属于 G 的主块(换句话说,G 的主块总是覆盖 N 的主块).

下面的定理 4.2.5 推广了事实:如果 D 是膨胀局部 G- 代数 $\inf(C)$ 的一个亏群,那么 DN/N 是局部 G/N- 代数 C 的一个亏群. 由此, 定理 4.2.5 给出了文献[48](Theorem 2.6.2)(见本章 4.1 节)的一个广义的反方向的结论.

定理 4.2.5 设 A 是一个 G- 代数,并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部 N- 代数,又设 C 是一个局部 G/N- 代数.如果 D 是广义膨胀 G- 代数

$$A \otimes_k \inf(C)$$

的一个亏群,那么 DN/N 是 C 的一个亏群.

推论 4.2.6 设 A 是一个 G- 代数,D 是 A 的一个亏群,并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部 N- 代数. 那么 DN/N 是 G/N 的一个 Sylow p- 子群.

推论 4.2.6 告诉我们,$\mathrm{Syl}(G)N/N$ 是 G/N 的 Sylow p- 子群.

4.3　本章结论的证明

引理 4.3.1　设 A 是一个 G- 代数，并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部 N- 代数，那么局部 G/N- 代数 C 的广义膨胀 G- 代数是一个局部 G- 代数.

证明：因为 $(\mathrm{Res}_N^G(A))^N$ 是一个局部代数，那么作为 k 上的向量空间，我们有下面的分解：

$$A^N = k \cdot 1_A \oplus J(A^N),$$

又因为 $N \trianglelefteq G$，因此上面的分解也是 A^N 作为 kG- 模的分解.

而且，因为 N 平凡地作用在 $\inf(C)$ 上，我们得到

$$\begin{aligned}
&(A \otimes_k \inf(C))^N \\
&= A^N \otimes_k (\inf(C))^N \\
&\qquad\qquad (\text{由文献[4] Lemma 2.1}) \\
&= A^N \otimes_k \inf(C) \\
&= k \cdot 1_A \otimes_k \inf(C) \oplus J(A^N) \otimes_k \inf(C) \\
&\qquad\qquad (\text{作为 } kG\text{- 模}),
\end{aligned}$$

并且

$$J(A^N) \otimes_k \inf(C)$$

是

$$(A \otimes_k \inf(C))^N$$

的一个幂零理想.

另外,由于 $1_A \neq 0$,容易得知

$$f: \quad k \cdot 1_A \otimes_k \inf(C) \to \inf(C)$$

按下面的方式是一个 G- 代数同构:

$$f(t \cdot 1_A \otimes_k c) = t \cdot c,$$

对任意 $t \in k$ 和 $c \in C$,那么

$$\begin{aligned}&(k \cdot 1_A \otimes_k \inf(C))^G\\&= (k \cdot 1_A \otimes_k \inf(C)) \cap (A \otimes_k \inf(C))^G\end{aligned}$$

是一个局部代数.

另一方面,因为

$$\begin{aligned}&(J(A^N) \otimes_k \inf(C))^G\\&= (J(A^N) \otimes_k \inf(C)) \cap (A \otimes_k \inf(C))^G\end{aligned}$$

是 $(A \otimes_k \inf(C))^G$ 的一个幂零理想,并且 $(k \cdot 1_{A \otimes_k} \inf(C))^G$ 是一个局部代数,那么

$$\begin{aligned}&(A \otimes_k \inf(C))^G\\&= (k \cdot 1_A \otimes_k \inf(C))^G \oplus (J(A^N) \otimes_k \inf(C))^G\end{aligned}$$

只有一个非零幂等元,即

$$A \otimes_k \inf(C)$$

是一个局部 G- 代数.

引理 4.3.2 设 A 是一个 G- 代数,$\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部 N- 代数,C 是一个 G/N- 代数,那么在 G- 代数同构的意义下,广义膨胀 G- 代数 $A \otimes_k \inf(C)$ 的任何嵌入局部 G- 代数可以表达为形式 $A \otimes_k \inf(C')$,这里 C' 是 C 的

某个嵌入局部 G/N-代数.

证明:设

$$1_{\inf(C)} = 1_C = \sum_{k=1}^{n} i_k$$

是 1_C 在 $C^{G/N}$ 中的一个本原正交幂等元分解.那么由文献[66](Corollary 4.6)我们知道,在 G/N-代数同构的意义下,

$$\{ i_l C_{i_l} \mid l = 1,2,\cdots,n \}$$

包含 C 的全部的嵌入局部 G/N-代数,再由引理4.3.1.

$$A \otimes_k \inf(i_l C_{i_l}) = (1 \otimes_k i_l)(A \otimes_k \inf(C))(1 \otimes_k i_l)$$

是一个局部 G-代数,即

$$(A \otimes_k \inf(i_l C_{i_l}))^G = (1 \otimes_k i_l)(A \otimes_k \inf(C))^G(1 \otimes_k i_l)$$

是一个局部代数,由此,$1 \otimes_k i_l$ 是

$$(A \otimes_k \inf(C))^G$$

的本原幂等元,$i = 1,2,\cdots,n$.

综上得知

$$1_{A \otimes_k} 1_{\inf(C)} = \sum_{l=1}^{n} 1 \otimes_k i_l$$

是 $1_{A \otimes_k \inf(C)}$ 在

$$(A \otimes_k \inf(C))^G$$

中的一个本原正交幂等元分解,即在 G-代数同构的意义下,对于某个 l,$A \otimes_k \inf(C)$ 的任何嵌入局部 G-代数能被表达为形式

$$A \otimes_k \inf(i_l C_{i_l}).$$

定理 4.2.1 的证明:由引理 4.3.1 和引理 4.3.2 便知定理 4.2.1 成立.

性质 4.2.2 的证明:因为 $A \otimes_k \inf(C)$ 属于 B 以及 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 属于 b,我们知道

$$\begin{aligned}\rho_{A\otimes\inf(C)}(e_b) &= (e_b \cdot 1_A) \otimes 1_{\inf(C)} \\ &= (e_b \cdot 1_{\mathrm{Res}_H^G A}) \otimes 1_{\inf(C)} \\ &= 1_{A\otimes\inf(C)} = \rho_{A\otimes\inf(C)}(e_B),\end{aligned}$$

由此,$e_B e_b \neq 0$,即 B 覆盖 b.

推论 4.2.3 的证明:在性质 4.2.2 的情形下,设 $A = k$.

参见文献[66](Proposition 16.5),我们有下面的内 G- 代数上的 Frobenius 公式:

引理 4.3.3 设 A 是一个内 G- 代数,B 是一个内 H- 代数,$H \leqslant G$.那么下面的 ϕ 是一个内 G- 代数同构,即:

$$\phi: \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(A) \otimes_k B) \to A \otimes_k \mathrm{Ind}_H^G B,$$

$$(x \otimes (a \otimes b) \otimes y) \mapsto (x \otimes a \otimes y) \otimes (x \otimes b \otimes y),$$

$$x, y \in G/H, a \in A, b \in B.$$

定理 4.2.4 的证明:设 $G = \biguplus_{g_i \in T} g_i N$,这里 T 是 N 在 G 中的左陪集代表系,并且 $g_1 = 1$;我们有

$$e_B = \sum_{g_i \in T} g_i \alpha_i, \alpha_i \in kN$$

是 e_B 的唯一分解.

注意到

$$\mathrm{Ind}_N^G(\mathrm{Res}_N^G A) = kG \otimes_{kN} \mathrm{Res}_N^G A \otimes_{kN} kG$$

是一个内 G-代数，它的单位元是

$$1_{\mathrm{Ind}_N^G(\mathrm{Res}_N^G A)} = \sum_{g_i \in T} g_i \otimes_{kN} 1_A \otimes_{kN} g_i^{-1},$$

它的结构同态是

$$\rho_{\mathrm{Ind}_N^G(\mathrm{Res}_N^G A)} : kG \longrightarrow \mathrm{Ind}_N^G(\mathrm{Res}_N^G A), g \mapsto \sum_{g_i \in T} g g_i \otimes_{kN} 1_A \otimes_{kN} g_i^{-1}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{Ind}_N^G(\mathrm{Res}_N^G A)}(e_B) &= e_B \cdot \sum_{g_i \in T} g_i \otimes_{kN} 1_A \otimes_{kN} g_i^{-1} \\ &= \sum_{g_i \in T} (e_B g_i) \otimes_{kN} 1_A \otimes_{kN} g_i^{-1}.\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}e_B \otimes_{kN} 1_A \otimes_{kN} 1 &= \sum_{g_i \in T} g_i \otimes_{kN} \alpha_i \cdot 1_A \otimes_{kN} 1 \\ &= \sum_{g_i \in T} g_i \otimes_{kN} \alpha_i \rho_{\mathrm{Res}_N^G A}(e_b) \otimes_{kN} 1 \\ &= \sum_{g_i \in T} g_i \otimes_{kN} \rho_{\mathrm{Res}_N^G A}(\alpha_i e_b) \otimes_{kN} 1,\end{aligned}$$

这里我们设 $\mathrm{Res}_N^G A$ 属于 N 的块 $b(=kNe_b)$.

如果

$$\rho\ \mathrm{Ind}_N^G(\mathrm{Res}_N^G A)(e_B) = 0,$$

那么由引理 2.2.2，我们知道，对每个 $g_i \in T$,

$$(e_B g_i) \otimes_{kN} 1_A \otimes_{kN} g_i^{-1} = 0,$$

特别地，

$$e_B \otimes_{kN} 1_A \otimes_{kN} 1 = 0,$$

由此又由引理 2.2.2，对任意的 $g_i \in T$，

$$\rho_{\mathrm{Res}_H^G A}(\alpha_i e_b) = 0.$$

那么，

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{g_i \in T} g_i \cdot \rho_{\mathrm{Res}_N^G A}(\alpha_i e_b) \\
&= \sum_{g_i \in T} g_i \cdot \rho_A(\alpha_i e_b) \\
&= \sum_{g_i \in T} \rho_A(g_i \alpha_i e_b) \\
&= \rho_A\Big(\sum_{g_i \in T} g_i \alpha_i e_b\Big) \\
&= \rho_A(e_B e_b) \\
&= \rho_A(e_B)\rho_{\mathrm{Res}_N^G A}(e_b) \\
&= \rho_A(e_B) \\
&= 1_A,
\end{aligned}$$

矛盾，即我们得到

$$\rho_{\mathrm{Ind}_N^G(\mathrm{Res}_N^G A)}(e_B)$$

是

$$(\mathrm{Ind}_N^G(\mathrm{Res}_N^G A))^G$$

的一个非零幂等元，因此，存在

$$(\mathrm{Ind}_N^G(\mathrm{Res}_N^G A))^G$$

的某个嵌入局部内 G- 代数 A'，属于 B.

另一方面，由引理 4.3.3，作为内 G- 代数，

$$\mathrm{Ind}_N^G(\mathrm{Res}_N^G A) = \mathrm{Ind}_N^G(\mathrm{Res}_N^G A \otimes_k k) \cong A \otimes_k \mathrm{Ind}_N^G k,$$

这里,k 被看做平凡内 N-代数,并且因为 $N \trianglelefteq G$ 以及 k 是平凡的,内 G-代数 $\mathrm{Ind}_N^G k$ 可以被自然地看做内 G/N-代数 $\mathrm{Ind}_N^G k$ 的膨胀内 G-代数. 因此由引理 4. 3. 2, 存在 $\mathrm{Ind}_N^G k$ 的嵌入局部内 G/N-代数 C,使得作为内 G-代数

$$A' \cong A \otimes_k \mathrm{inf}(C),$$

即,广义膨胀局部内 G-代数 $A \otimes_k \mathrm{inf}(C)$ 属于 B.

参见文献[66](Lemma 14. 3),我们有下面的关于 G-代数的投射性的结论:

引理 4. 3. 4　设 A 是一个 G-代数并且它是相对子群 H 投射的,那么对于任意的 G-代数 B,$A \otimes_k B$ 是 H-投射的,特别地,如果 A 是一个投射 G-代数,那么 $A \otimes_k B$ 也是投射 G-代数.

定理 4. 2. 5 的证明:首先,由引理 4. 3. 1 我们知道 $A \otimes_k \mathrm{inf}(C)$ 是一个局部 G-代数,又因为 D 是它的一个亏群,我们设

$$1_{A \otimes_k \mathrm{inf}(C)} = \mathrm{Tr}_D^G(d),$$

这里

$$d \in (A \otimes_k \mathrm{inf}(C))^D,$$

因此

$$\mathrm{Tr}_D^{DN}(d) \in (A \otimes_k \mathrm{inf}(C))^{DN} \subseteq (A \otimes_k \mathrm{inf}(C))^N.$$

其次,我们有

$$(A \otimes_k \mathrm{inf}(C))^N$$

$$= A^N \otimes_k \inf(C)$$

$$= k \cdot 1_A \otimes_k \inf(C) \oplus J(A^N) \otimes_k \inf(C),$$

那么存在某个

$$i \in \inf(C)$$

和

$$j \in J(A^N) \otimes_k \inf(C),$$

使得

$$\mathrm{Tr}_D^{DN}(d) = 1_A \otimes_k i + j,$$

而且,因为 $N \trianglelefteq G$ 以及下面的 G- 代数同构:

$$k \cdot 1_A \otimes_k \inf(C) \backsimeq \inf(C),$$

我们知道

$$i \in \inf(C)^{DN}$$

和

$$j \in (A \otimes_k \inf(C))^{DN}.$$

我们得到:

$$1_{A \otimes_k \inf(C)} = \mathrm{Tr}_D^G(d) = 1_A \otimes_k \mathrm{Tr}_{DN}^G(i) + \mathrm{Tr}_{DN}^G(j).$$

因为 j 是一个幂零元,所以

$$\mathrm{Tr}_{DN}^G(j) \in J((A \otimes_k \inf(C))^G),$$

由此

$$1_{A \otimes_k \mathrm{Tr}_{DN}^G}(i) \notin J((A \otimes_k \inf(C))^G),$$

又因为 $(A \otimes_k \inf(C))^G$ 是一个局部代数,那么

$$1_A \otimes_k \mathrm{Tr}_{DN}^G(i)$$

是 $(A \otimes_k \inf(C))^G$ 中的一个单位.

再由下面的 G- 代数同构：

$$k \cdot 1_A \otimes_k \operatorname{inf}(C) \cong \operatorname{inf}(C),$$

我们知道 $\operatorname{Tr}_{DN}^{G}(i)$ 是 $(\operatorname{inf}(C))^{G}$ 的一个单位，即

$$\operatorname{Tr}_{DN/N}^{G/N}(i) = \operatorname{Tr}_{DN}^{G}(i)$$

是 $C^{G/N}$ 的一个单位，由此局部 G/N- 代数 C 是 DN/N- 投射的，那么

$$DN/N \geqslant H/N,$$

这里 H 是 G 的某个子群使得 H/N 是 C 作为 G/N-代数的一个亏群并且

$$DN \geqslant H \geqslant N.$$

我们得到 $\operatorname{inf}(C)$ 是 H- 投射的，并且由引理 4. 3. 4，$A \otimes_k \operatorname{inf}(C)$ 也是 H- 投射的. 那么 H 包含 $A \otimes_k \operatorname{inf}(C)$ 的某个亏群，也就是 D 的某个共轭，由此，$H = DN$ 以及

$$H/N = DN/N.$$

推论 4. 2. 6 的证明：在定理 4. 2. 5 的情形下，设 $C = k$，平凡 G/N- 代数. 我们有 DN/N 是 k 的作为平凡 G/N-代数的亏群，由此 DN/N 是 G/N 的 Sylow p- 子群.

第 5 章　*G*- 模和 *G*- 代数上的广义 Brauer 构造函子

5.1　研究背景和结论

设 P 是 G 的一个 p- 子群，$PC_G(P) \leqslant H \leqslant N_G(P)$. 又设 $\{C_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 是 G 的全部的共轭类的集合，那么

$$\{C_i \cap C_G(P), i = 1, 2, \cdots, n\}$$

都是 G 的 $N_G(P)$- 共轭类的并，以 $\widehat{C_i}$ 和 $C_i \cap \widehat{C_G}(P)$ 表示共轭类的类和，那么下面的类和映射：

$$\hat{s}: \quad \widehat{C_i} \to C_i \cap \widehat{C_G}(P)$$

定义了一个从群代数 kG 的中心到群代数 kH 的中心的代数同态（文献[56]），它首先由 Brauer 在文献[15] 中提出，并在文献[55] 中首次被 Nagao 称为 Brauer 同态.

在文献[18] 中，作者给出了上面的 Brauer 同态在 G- 代数上的现代形式（参见第 1 章），并利用 Brauer 同态定义了 (b, G)—Brauer 对的概念，事实上，在文献[25]

中,Green 在群代数上已经给出了 Brauer 同态的这种类似形式.

在有限群的表示论领域,Brauer 同态是一个十分有用的工具,Brauer 第一、二、三主要定理以及其他许多基础性的重要结论正是通过这个工具得到的(文献[66]).

G- 代数上的 Brauer 同态还被广泛地应用到 G- 代数上的局部分析中去,Brauer 子对的定义及其之间相互关系、点群上的包含和投射关系的建立、Brauer 的第二主要定理的推广、Puig 建立幂零块的源代数的结构定理等都体现了这个同态的重要性(文献[62]、[66]、[61]、[18]、[8]、[58]).

设 P 是 G 的一个 p- 子群,V 是一个 $\mathcal{O}G$- 模. 在文献[17]、[16]中,Broue 得到了下面的 Brauer 构造函子:

$$\mathrm{Br}_P^V: V^P \to V(P),$$

$$v \mapsto v + \left(\sum_{Q<P} V_Q^P + \pi V^P\right),$$

它是一个 $\mathcal{O}N_G(P)/P$- 模同态,Broue 称它为 Brauer 态射,并称

$$V(P) = V^P/\left(\sum_{Q<P} V_Q^P + \pi V^P\right)$$

为 Brauer 构造. 在文献[16]中,通过系统地应用 Brauer 构造函子,他得到了关于 p-permutation 模和 Scott 模的一些经典结论. 近期关于 p- 群上的 endo—permutation

模以及p-群上的Dade群的研究也涉及Brauer构造函子的应用.

设$H \leqslant G$,ψ是一个从群G到完备离散赋值环$\mathcal{O}$的单位群上的群同态,在文献[11]中,通过借用(G,ψ)-不动点这个概念,作者得到了群代数上的模上的Brauer构造函子的如下广义形式:

$$\mathrm{Br}_{(H,\psi)}^{V}: V^{(H,\psi)} \longrightarrow V^{(H,\psi)}/I_{(H,\psi)}^{V},$$
$$v \longmapsto v + I_{(H,\psi)}^{V}, v \in V^{(H,\psi)},$$

这里,

$$I_{(H,\psi)}^{V} := \sum_{K \leqslant H, p \,\|\, H:K|} V_{K}^{(H,\psi)} + \pi V^{(H,\psi)},$$

并称它为群代数上的模上的广义Brauer构造函子.通过应用群代数上的模上的广义Brauer构造函子的这个工具,作者刻画了p-monomial模的若干性质,并成功地推广了文献[16]中的关于p-permutation模的对应结论,这里p-monomial模是源于p-permutation模的一种广义形式.在文献[12]中,同样用这个工具,作者讨论了p-permutation等价.

在文献[28]中,沿着文献[11]中的思路,Hartmann得到了G-代数上的Brauer同态的新的广义形式,并用G-代数上的广义Brauer同态这个工具,他约化了交换p-群情形下的monomial Dade-群,他还证实了交换p-群上的每个不可分解endo—monomial模是endo—permutation模.本章在他提出的G-代数上的广义

Brauer 同态的基础上,我们提出如下形式的 G- 代数上的广义 Brauer 构造:

$$A(\hat{H}) := A^{(H,\hat{H})}/\bar{I}_{\hat{H}}^A, \bar{I}_{\hat{H}}^A := \bigoplus_{\psi \in \hat{H}} I_{(H,\psi)}^A,$$

$$I_{(H,\psi)}^A := \sum_{K < H} A_K^{(H,\psi)} + \pi A^{(H,\psi)},$$

以及对应的 G- 代数 A 上的关于 $N_G(H)$- 子群 $\hat{H}$ 的广义 Brauer 构造函子:

$$\mathrm{Br}_{\hat{H}}^A : A^{(H,\hat{H})} \to A^{(H,\hat{H})}/\bar{I}_{\hat{H}}^A,$$

$$a \mapsto a + \bar{I}_{\hat{H}}^A, a \in A^{(H,\hat{H})}.$$

许多作者都研究过 Brauer 同态和 Brauer 构造函子的张量积.例如,在文献[64]中,Rouquier 证实了如下的 p-permutation 模上的 Brauer 构造函子是同构的:

设 V 和 W 是 p-permutation kG- 模,

$$\alpha_{V,W} : V(Q) \otimes W(Q) \to (V \otimes W)(Q)$$

和

$$\beta_V : V^*(Q) \to V(Q)^*$$

都是典范映射.那么 $\alpha_{V,W}$ 诱导了下面的从 p-permutation kG- 模 × p-permutation kG- 模到 p-permutation $kN_G(Q)$- 模的函子同构:

$$\alpha : \mathrm{Res}_{\Delta N_G(Q)}^{N_G(Q) \times N_G(Q)} \mathrm{Br}_{Q \times Q} \cong \mathrm{Br}_Q \mathrm{Res}_{\Delta G}^{G \times G},$$

β_V 诱导了下面的从 p-permutation kG- 模到 p-permutation $kN_G(Q)$- 模的函子同构:

$$\beta : \mathrm{Br}_Q(-)^* \cong (-)^* \mathrm{Br}_Q.$$

在文献[12](Corollary 3.6)中,作者证实了广义 Brauer 构造函子与双边 p-monomial 模在某个群代数上的张量积相容,结论如下:

设 P 是有限群 G,H,L 的一个公共子群,对于 $\varphi \in \mathrm{Hom}(P,\mathcal{O}^*)$,我们用 $\Delta\varphi \in \mathrm{Hom}(\Delta P,\mathcal{O}^*)$ 表示群同态:$\Delta\varphi(x,x)=\varphi(x)$,$x \in P$.又设 Q 是 G,H 的一个公共子群,X 是相对 ΔQ-投射的线性源$(\mathcal{O}G,\mathcal{O}H)$-双模,并且对于每个 $R \leqslant Q$,

$$\mathrm{Hom}_{F_p(G)}(P,R) \subseteq \mathrm{Hom}_{F_p(H)}(P,R).$$

那么对于每个$(\mathcal{O}H,\mathcal{O}L)$-双模 Y,

$$\begin{aligned} f_{P,\varphi}^{X,Y}: & \bigoplus_{\psi,\lambda \in \mathrm{Hom}(P,\mathcal{O}^*),\psi\lambda=\varphi} \bar{X}(\Delta P,\Delta\psi) \\ & \otimes_{kC_H(P)} \bar{Y}(\Delta P,\Delta\lambda) \\ & \rightarrow \overline{X \otimes_{\mathcal{O}H} Y}(\Delta P,\Delta\varphi) \end{aligned}$$

是一个$(k[C_G(P)],k[C_L(P)])$-双模同构;对于每个左 $\mathcal{O}H$-模 Y,

$$\begin{aligned} g_{P,\varphi}^{X,Y}: & \bigoplus_{\psi,\lambda \in \mathrm{Hom}(P,\mathcal{O}^*),\psi\lambda=\varphi} \bar{X}(\Delta P,\Delta\psi) \\ & \otimes_{kC_H(P)} \bar{Y}(P,\lambda) \\ & \rightarrow \overline{X \otimes_{\mathcal{O}H} Y}(P,\varphi) \end{aligned}$$

是一个 $k[C_G(P)]$-模同构.

特别地,如果 X 是相对 ΔQ-投射的平凡源$(\mathcal{O}G,\mathcal{O}H)$-双模,那么对于每个$(\mathcal{O}H,\mathcal{O}L)$-双模 Y,我们有下面的$(k[C_G(P)],k[C_L(P)])$-双模同构:

$$X(\Delta P)\otimes_{kC_H(P)}Y(\Delta P)\cong\overline{X\otimes_{kH}Y}(\Delta P),$$

以及对于每个左 kH-模 Y,我们有下面的左 $k[C_H(P)]$-模同构:

$$Y(\Delta P)\otimes_{kC_H(P)}Y(P)\cong\overline{X\otimes_{kH}Y}(P).$$

在文献[4](Theorem 2.6)中,作者证明了 Brauer 同态与 G-代数的张量积相容,结论如下:

设 A_i 是一个 G_i-代数,它同时是特征为素数 p 的代数封闭域 k 上的一个有限维代数,P_i 是 G_i 的 p-子群,这里 p 整除群 G_i 的阶,$i=1,2$. 那么

$$\mathrm{Br}_{P_1\times P_2}^{A_1\otimes A_2}=\mathrm{Br}_{P_1}^{A_1}\otimes\mathrm{Br}_{P_2}^{A_2}.$$

在上面的结论中,左右两边相等表示的是左右两边的 Brauer 态射可以等同,也即它们在相同的元素上的像可以被认为是一样的.

在本章中,我们进一步讨论 G-模和 G-代数上的广义 Brauer 构造函子的张量积,本章的主要结论证实了 G-模和 G-代数上的广义 Brauer 构造函子分别与 G-模和 G-代数的外张量积相容.结论如下:

定理 5.1.1　V_i 是一个 G_i-模,$H_i\leqslant G_i$,(H_i,ψ_i) 属于 $M_k(H_i)$,$i=1,2$. 那么我们有下面的 $kN_{G_1\times G_2}(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)$-模同构:

$$V_1(H_1,\psi_1)\otimes_k V_2(H_2,\psi_2)$$

$$\cong(V_1\otimes_k V_2)(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2),$$

以及 Brauer 态射的等同:

$$\mathrm{Br}^{V_1}_{(H_1,\phi_1)} \otimes_k \mathrm{Br}^{V_2}_{(H_2,\phi_2)} = \mathrm{Br}^{V_1 \otimes_k V_2}_{(H_1 \times H_2,\phi_1 \times \phi_2)}.$$

定理 5.1.2 A_i 是一个 G_i-代数，$H_i \leqslant G_i$，$\hat{H}_i$ 是 $\mathrm{Hom}(G_i,\mathcal{O}^*)$ 的一个 $N_{G_i}(H_i)$-子群，$i=1,2$. 那么下面是一个 $(N_{G_1\times G_2}(H_1 \times H_2)/(H_1 \times H_2))$-代数同构：

$$A_1(\hat{H}_1) \otimes_k A_2(\hat{H}_2) \cong (A_1 \otimes_{\mathcal{O}} A_2)(\hat{H}_1 \times \hat{H}_2),$$

以及 Brauer 态射的等同：

$$\mathrm{Br}^{A_1}_{\hat{H}_1} \otimes_k \mathrm{Br}^{A_2}_{\hat{H}_2} = \mathrm{Br}^{A_1 \otimes_{\mathcal{O}} A_2}_{(\hat{H}_1 \times \hat{H}_2)}.$$

定理 5.1.1 提供了 G-模上的广义 Brauer 构造函子的张量积的一种新的情形，定理 5.1.2 推广了文献 [4] (Theorem 2.6).

既然在过去的 50 年里，Brauer 同态在有限群的表示理论中是如此的重要，我们期望在现代模表示论的发展过程中，G-模和 G-代数上的广义 Brauer 构造函子同样十分有用.

5.2 G-模上的广义 Brauer 构造函子

H 是 G 的一个子群，我们用 $\mathrm{Hom}(H,\mathcal{O}^*)$ 表示从 H 到 $\mathcal{O}^*$ 的全体群同态的集合，这里 $\mathcal{O}^*$ 表示 $\mathcal{O}$ 的单位群，那么 $\mathrm{Hom}(H,\mathcal{O}^*)$ 按下列乘法作成一个有限群(因为群 H 的像都是单位根或 H 只有有限个一次表示)：

$$(\psi,\phi)(h) := \psi(h)\phi(h),$$

这里 $h \in H$，并且 $\psi,\phi \in \mathrm{Hom}(H,\mathcal{O}^*)$.

我们称 $\hat{H}$ 是 $\mathrm{Hom}(H,\mathbb{C}^*)$ 的一个 $N_G(H)$-子群，如果 $\hat{H}$ 是 $\mathrm{Hom}(H,\mathbb{C}^*)$ 的子群，同时对任何 $\psi \in \hat{H}$ 和 $g \in N_G(H)$，${}^g\psi \in \hat{H}$ 成立，这里 ${}^g\psi$ 定义为对所有的 $x \in {}^gH$，

$${}^g\psi(x) := \psi(x^g).$$

$H \leqslant G$，我们设

$$M_{\mathbb{C}}(H) := H \times \mathrm{Hom}(H,\mathbb{C}^*).$$

对于 $(G,\varphi) \in M_{\mathbb{C}}(G)$ 和 $(H,\psi) \in M_{\mathbb{C}}(H)$，我们称

$$(H,\psi) \leqslant (G,\varphi),$$

如果 ψ 是 φ 在 H 上的限制. 进一步，对于 $g \in G$，我们定义 ${}^g(H,\psi)$ 为

$${}^g(H,\psi) := ({}^gH,{}^g\psi).$$

并且用 $N_G(H,\psi)$ 表示 (H,ψ) 在 G 中的稳定化子，显然

$$H \leqslant N_G(H,\psi) \leqslant N_G(H).$$

设 $H_i \leqslant G_i$ 以及 $(H_i,\psi_i) \in M_{\mathbb{C}}(H_i)$，$i = 1,2$，那么

$$(H_1 \times H_2,\psi_1 \times \psi_2) \in M_{\mathbb{C}}(H_1 \times H_2),$$

这里 $(\psi_1 \times \psi_2)$ 定义为对所有的 $(h_1,h_2) \in H_1 \times H_2$，

$$(\psi_1 \times \psi_2)(h_1,h_2) := \psi_1(h_1)\psi_2(h_2).$$

我们还注意到

$$N_{G_1 \times G_2}(H_1 \times H_2,\psi_1 \times \psi_2) = N_{G_1}(H_1,\psi_1) \times N_{G_2}(H_2,\psi_2).$$

在本章中，我们也称一个有限秩自由的 $\mathbb{C}G$-模 V 为 G-模 V. 对于 $H \leqslant G$ 和 $(H,\psi) \in M_{\mathbb{C}}(H)$，我们称

$$V^{(H,\psi)} := \{v \in V \mid hv = \psi(h)v, h \in H\}$$

是 V 的 (H,ψ)-不动点集，显然，

$$V^{g(H,\psi)} = gV^{(H,\psi)},$$

因此 $V^{(H,\psi)}$ 是 V 的 $N_G(H,\psi)$-子模.

对于 $(H,\psi) \leqslant (G,\varphi)$, 我们注意到

$$V^{(H,\psi)} \supseteq V^{(G,\varphi)}.$$

由此我们在 G-模 V 上定义下面的广义迹映射:

$$\mathrm{Tr}_{(H,\psi)}^{(G,\varphi)} : V^{(H,\psi)} \longrightarrow V^{(G,\varphi)},$$

$$v \longmapsto \sum_{g \in G/H} \varphi(g^{-1})gv, v \in V^{(H,\psi)}.$$

显然,这个定义是不受陪集代表系 $\{g \in G/H\}$ 的选取的影响. 我们总是用 $V_H^{(G,\varphi)}$ 来表示象集合 $\mathrm{Tr}_{(H,\psi)}^{(G,\varphi)}(V^{(H,\psi)})$, 而且, 如果 $K \leqslant H \leqslant G$, 我们有 $V_K^{(G,\varphi)} \subseteq V_H^{(G,\varphi)}$ (文献[11]Temma 1.3(b)).

设 $H \leqslant G$ 和 $(H,\psi) \in M_*(H)$, 按文献[11], 在本章中我们定义 G-模 V 上的关于 (H,ψ) 的广义 Brauer 构造为

$$V(H,\psi) := V^{(H,\psi)} / I_{(H,\psi)}^V,$$

$$I_{(H,\psi)}^V := \sum_{K \leqslant H, p \mid |H:K|} V_K^{(H,\psi)} + \pi V^{(H,\psi)}.$$

同样,记

$$\mathrm{Br}_{(H,\psi)}^V : V^{(H,\psi)} \longrightarrow V^{(H,\psi)} / I_{(H,\psi)}^V,$$

$$v \longmapsto v + I_{(H,\psi)}^V, v \in V^{(H,\psi)}$$

是对应的广义 Brauer 构造函子.

显然, $V(H,\psi)$ 是一个 $kN_G(H,\psi)$-模. 如果 H 是一个 p-群, 并且 ψ 是一个平凡的群同态, 那么 $V(H,\psi)$ 就

是 Broue 所提出的 Brauer 构造. 需要说明的是, 由文献[11](Remark 2.3), 在 H 不是 p- 群的情况下, $V(H,\psi)$ 仍然可以是非零的. 文献[11]、[13]、[12]、[14]中的研究表明, G- 模 V 上的关于(H,ψ)的广义 Brauer 构造是研究线性源模的一个有力工具. 本节中关于广义 Brauer 构造的基本知识介绍, 读者可以参考文献[11].

V_i 是一个 G_i- 模, $i=1,2$, 那么 $V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2$ 可以被看做一个 $G_1 \times G_2$- 模, 这里, 对任何$(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2$ 和 $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$,

$$(g_1,g_2)(v_1 \otimes_{\mathcal{O}} v_2) := g_1v_1 \otimes_{\mathcal{O}} g_2v_2$$

我们称 $V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2$ 为 V_1 和 V_2 的张量 $G_1 \times G_2$- 模.

W_i 是 V_i 的 H_i- 子模, 作为 $\mathcal{O}$- 模, 我们用 $W_1 \otimes_{\mathcal{O}} W_2$ 表示形如有限和 $\sum_{i,j} w_{1i} \otimes w_{2j}$ 的元素的集合, 这里 $w_{1i} \in W_1$ 和 $w_{2j} \in W_2$, 那么 $W_1 \otimes_{\mathcal{O}} W_2$ 作成 $V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2$ 的一个 $\mathcal{O}(H_1 \times H_2)$- 子模, 在本章, 我们称它是张量 $G_1 \times G_2$- 模 $V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2$ 的 $H_1 \times H_2$- 子模.

引理 5.2.1　设 V_i 是一个 G_i- 模, $H_i \leqslant G_i$, $(H_i,\psi_i) \in M_i(H_i)$, $i=1,2$. 那么作为张量 $G_1 \times G_2$- 模 $V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2$ 的 $N_{G_1 \times G_2}(H_1 \times H_2, \psi_1 \times \psi_2)$- 子模.

$$(V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2)^{(H_1 \times H_2, \psi_1 \times \psi_2)} = V_1^{(H_1,\psi_1)} \otimes_{\mathcal{O}} V_2^{(H_2,\psi_2)}.$$

证明: 首先, 我们注意到作为张量 $G_1 \times G_2$- 模 $V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2$ 的 $N_{G_1 \times G_2}(H_1 \times H_2, \psi_1 \times \psi_2)$- 子模, 下面的包含关系是自然的:

$$V_1^{(H_1,\psi_1)} \otimes_{\mathcal{O}} V_2^{(H_2,\psi_2)} \subseteq (V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2)^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}.$$

其次，不难得到下面的 $N_{G_1\times G_2}(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)$-模同构式：

$$\begin{aligned}
&V_1^{(H_1,\psi_1)} \otimes_{\mathcal{O}} V_2^{(H_2,\psi_2)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}H_1}({}_{\psi_1}\mathcal{O}, V_1) \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}H_2}({}_{\psi_2}\mathcal{O}, V_2)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(H_1\times H_2)}(({}_{\psi_1}\mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} ({}_{\psi_2}\mathcal{O}), V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(H_1\times H_2)}(({}_{\psi_1\times\psi_2})\mathcal{O}, V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2)\\
&\cong (V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2)^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}.
\end{aligned}$$

这里，${}_{\psi_i}\mathcal{O}$ 是指由 ψ_i 提供的线性 H_i-模，$i=1,2$，那么由引理 2.3.2 可知引理 5.2.1 得证.

引理 5.2.2 设 V_i 是一个 G_i-模，$K_i \leqslant H_i \leqslant G_i$，$(H_i, \psi_i) \in M_{\mathcal{O}}(H_i)$，$i=1,2$. 那么作为张量 $G_1\times G_2$-模 $V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2$ 的 $N_{G_1\times G_2}(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)$-子模，

$$(V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2)^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}_{(K_1\times K_2)} = (V_1)^{(H_1,\psi_1)}_{K_1} \otimes_{\mathcal{O}} (V_2)^{(H_2,\psi_2)}_{K_2}.$$

证明：首先，由引理 5.2.1，作为张量 $G_1\times G_2$-模 $V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2$ 的 $N_{G_1\times G_2}(K_1\times K_2,\psi_1\times\psi_2|_{K_1\times K_2})$-子模，我们有

$$(V_1 \otimes_{\mathcal{O}} V_2)^{(K_1\times K_2,\psi_1\times\psi_2|_{K_1\times K_2})} = (V_1)^{(K_1,\psi_1|_{K_1})} \otimes_{\mathcal{O}} (V_2)^{(K_2,\psi_2|_{K_2})}.$$

另一方面，对于任意的 $v_1 \in V_1^{(K_1,\psi_1|_{K_1})}$ 和 $v_2 \in V_2^{(K_2,\psi_2|_{K_2})}$，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}_{(K_1\times K_2,\psi_1\times\psi_2|_{K_1\times K_2})}(v_1 \otimes_{\mathcal{O}} v_2)\\
&= \sum_{(h_1,h_2)\in H_1\times H_2/K_1\times K_2} (\psi_1\times\psi_2)((h_1,h_2)^{-1})\\
&\quad (h_1,h_2)(v_1 \otimes_{\mathcal{O}} v_2)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{(h_1,h_2)\in H_1\times H_2/K_1\times K_2} \psi_1(h_1^{-1})h_1v_1 \otimes_k \psi_2(h_2^{-1})h_2v_2$$

$$= \sum_{h_1\in H_1/K_1} \psi_1(h_1^{-1})h_1v_1 \otimes_k \sum_{h_2\in H_2/K_2} \psi_2(h_2^{-1})h_2v_2$$

$$= \mathrm{Tr}_{(K_1,\psi_1|K_1)}^{(H_1,\psi_1)} v_1 \otimes_k \mathrm{Tr}_{(K_2,\psi_2|K_2)}^{(H_2,\psi_2)} v_2.$$

由此我们知道，作为张量 $G_1 \times G_2$- 模 $V_1 \otimes_k V_2$ 的 $N_{G_1\times G_2}(H_1 \times H_2,\psi_1 \times \psi_2)$- 子模.

$$(V_1 \otimes_k V_2)_{K_1\times K_2}^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)} = (V_1)_{K_1}^{(H_1,\psi_1)} \otimes_k (V_2)_{K_2}^{(H_2,\psi_2)}.$$

引理 5.2.3　设 V_i 是一个 G_i- 模，$H_i \leqslant G_i$，$(H_i,\psi_i) \in M_k(H_i)$，$i = 1,2$. 那么作为张量 $G_1 \times G_2$- 模 $V_1 \otimes_k V_2$ 的 $N_{G_1\times G_2}(H_1 \times H_2,\psi_1 \times \psi_2)$- 子模，

$$I_{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}^{V_1\otimes V_2} = I_{(H_1,\psi_1)}^{V_1} \otimes_k V_2^{(H_2,\psi_2)} + V_1^{(H_1,\psi_1)} \otimes_k I_{(H_2,\psi_2)}^{V_2}.$$

证明：首先，既然 $V_i^{(H_i,\psi_i)} = (V_i)_{H_i}^{(H_i,\psi_i)}$，$i = 1,2$，由引理 5.2.2 我们知道，作为张量 $G_1 \times G_2$- 模 $V_1 \otimes_k V_2$ 的 $N_{G_1\times G_2}(H_1 \times H_2,\psi_1 \times \psi_2)$- 子模，

$$I_{(H_1,\psi_1)}^{V_1} \otimes_k V_2^{(H_2,\psi_2)} + V_1^{(H_1,\psi_1)} \otimes_k I_{(H_2,\psi_2)}^{V_2} \subseteq I_{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}^{V_1\otimes V_2}.$$

现在，设 $K \leqslant H_1 \times H_2$，使得 $p \mid |H_1 \times H_2 : K|$，并设

$$H = K(H_1 \times 1).$$

我们有

$$H = H_1 \times K_2,$$

这里 $K_2 \leqslant H_2$.

如果 $p \mid |H_2 : K_2|$，也就是

$$p \mid |(H_1 \times H_2) : H|,$$

由引理 5.2.1 我们得到

$$
\begin{aligned}
(V_1 \otimes_k V_2)_K^{(H_1\times H_1,\psi_1\times\psi_1)} &\subseteq (V_1 \otimes_k V_2)_H^{(H_1\times H_1,\psi_1\times\psi_1)} \\
&= (V_1 \otimes_k V_2)_{H_1\times K_2}^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)} \\
&= V_1^{(H_1,\psi_1)} \otimes_k (V_2)_{K_2}^{(H_2,\psi_2)} \\
&\subseteq V_1^{(H_1,\psi_1)} \otimes_k I_{(H_2,\psi_2)}^{V_2}.
\end{aligned}
$$

如果 $p \nmid |H_2:K_2|$，即

$$p \nmid |(H_1 \times H_2):K(H_1 \times 1)|,$$

然而 $p \mid |(H_1 \times H_2):K|$，我们有

$$p \mid |K(H_1 \times 1):K| = |(H_1 \times 1):K_1 \times 1|,$$

这里

$$K_1 \times 1 = (H_1 \times 1) \cap K.$$

对于任意

$$v \in (V_1 \otimes_k V_2)^{(K,(\psi_1\times\psi_2)|_K)},$$

由文献[11]，(Lemma 1.3(e))，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_{(K,(\psi_1\times\psi_2)|_K)}^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}(v) \\
= &\sum_{x\in(H_1\times 1\backslash H_1\times H_2/K)} (\psi_1 \times \psi_2)(x^{-1}) \\
&\mathrm{Tr}_{(H_1\times 1\cap {}^xK,(\psi_1\times\psi_2)|_{H_1\times 1\cap {}^xK})}^{(H_1\times 1,\psi_1\times 1)}(xv).
\end{aligned}
$$

设 $x = (x_1, x_2)$. 既然

$$H_1 \times 1 \trianglelefteq H_1 \times H_2,$$

并且

$$
\begin{aligned}
xv &\in (V_1 \otimes_k V_2)^{({}^xK,(\psi_1\times\psi_2)|_{{}^xK})} \\
&\subseteq (V_1 \otimes_k V_2)^{({}^{x_1}K_1\times 1,(\psi_1|_{{}^{x_1}K_1})\times 1)},
\end{aligned}
$$

由引理 5.2.2 我们知道

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_{(K,(\psi_1\times\psi_2)|_K)}^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}(v)\\
=&\sum_{(x_1,x_2)\in(H_1\times 1\backslash H_1\times H_2/K}\psi_1(x_1^{-1})\psi_2(x_2^{-1})\\
&\mathrm{Tr}_{({}^{x_1}K_1\times 1,(\psi_1|_{{}^{x_1}K_1})\times 1}^{(H_1\times 1,\psi_1\times 1)}(xv)\\
\in&\sum_{(x_1,x_2)\in(H_1\times 1\backslash H_1\times H_2/K)}(V_{{}^{x_1}K_1}^{(H_1,\psi_1)}\otimes_{\mathcal{O}}V_2)\\
\subseteq&\Big(\sum_{(x_1,x_2)\in(H_1\times 1\backslash H_1\times H_2/K)}V_{{}^{x_1}K_1}^{(H_1,\psi_1)}\Big)\otimes_{\mathcal{O}}V_2.\\
\subseteq&\Big(\sum_{L\leqslant H_1,p\,\|\,H_1:L|}V_L^{(H_1,\psi_1)}\Big)\otimes_{\mathcal{O}}V_2.
\end{aligned}$$

在限制到有限秩的自由 $\mathcal{O}$-模的张量积的情况下,

$$\begin{aligned}
&\Big(\big(\sum_{L\leqslant H_1,p\,\|\,H_1:L|}V_L^{(H_1,\psi_1)}\big)\otimes_{\mathcal{O}}V_2\Big)\\
&\cap\ (V_1^{(H_1,\psi_1)}\otimes_{\mathcal{O}}V_2^{(H_2,\psi_2)})\\
&\subseteq\Big(\sum_{L\leqslant H_1,p\,\|\,H_1:L|}V_L^{(H_1,\psi_1)}\Big)\otimes_{\mathcal{O}}V_2^{(H_2,\psi_2)}\\
&\subseteq I_{(H_1,\psi_1)}^{V_1}\otimes_{\mathcal{O}}V_2^{(H_2,\psi_2)},
\end{aligned}$$

由此我们有

$$\mathrm{Tr}_{(K,(\psi_1\times\psi_2)|_K)}^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}(v)\in I_{(H_1,\psi_1)}^{V_1}\otimes_{\mathcal{O}}V_2^{(H_2,\psi_2)},$$

因此

$$(V_1\otimes_{\mathcal{O}}V_2)_K^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}\subseteq I_{(H_1,\psi_1)}^{V_1}\otimes_{\mathcal{O}}V_2^{(H_2,\psi_2)}.$$

总之

$$I_{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}^{V_1\otimes_{\mathcal{O}}V_2}\subseteq I_{(H_1,\psi_1)}^{V_1}\otimes_{\mathcal{O}}V_2^{(H_2,\psi_2)}+V_1^{(H_1,\psi_1)}\otimes_{\mathcal{O}}I_{(H_2,\psi_2)}^{V_2}.$$

本证明完成.

定理 5.1.1 的证明: 我们知道下面的自然的 $kN_{G_1\times G_2}(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)$-模同态:

$$
\begin{aligned}
&(V_1 \otimes_k V_2)^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}/(I_{(H_1,\psi_1)}^{V_1}\otimes_k V_2^{(H_2,\psi_2)} \\
&+ V_1^{(H_1,\psi_1)}\otimes_k I^{V_2}_{(H_2,\psi_2)}) \\
&\to (V_1^{(H_1,\psi_1)}/I^{V_1}_{(H_1,\psi_1)})\otimes_k (V_2^{(H_2,\psi_2)})/I^{V_2}_{(H_2,\psi_2)}),
\end{aligned}
$$

按与文献[29](Proposition 2.1)类似的证明过程，我们知道该同态是一个同构.

与此同时，由引理 5.2.3，作为 $kN_{G_1\times G_2}(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)$-模，

$$
\begin{aligned}
&(V_1 \otimes_k V_2)^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}/(I_{(H_1,\psi_1)}^{V_1}\otimes_k V_2^{(H_2,\psi_2)} \\
&\quad + V_1^{(H_1,\psi_1)}\otimes_k I^{V_2}_{(H_2,\psi_2)}) \\
&= (V_1 \otimes_k V_2)^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}/I^{V_1\otimes_k V_2}_{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}.
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&V_1(H_1,\psi_1)\otimes_k V_2(H_2,\psi_2) \\
&\cong (V_1\otimes_k V_2)(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2).
\end{aligned}
$$

由以上自然映射下的同构式，将

$$\mathrm{Br}^{V_1}_{(H_1,\psi_1)}\otimes_k \mathrm{Br}^{V_2}_{(H_2,\psi_2)}$$

看做是 $kN_{G_1\times G_2}(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)$-模

$$(V_1\otimes_k V_2)^{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}$$

上的广义 Brauer 构造函子，显然有下面的 Brauer 态射的等同：

$$\mathrm{Br}^{V_1}_{(H_1,\psi_1)}\otimes_k \mathrm{Br}^{V_2}_{(H_2,\psi_2)} = \mathrm{Br}^{V_1\otimes_k V_2}_{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}.$$

定理 5.1.1 得证.

5.3　G-代数上的广义Brauer构造函子

在本章我们总是限定每个G-代数同时也是一个有限秩的自由$\mathcal{O}$-代数. 若A是一个G-代数, 那么它也是一个G-模. $H \leqslant G$, 我们称B是A的一个H-子代数, 如果B是A的一个幺$\mathcal{O}$-子代数, 并且它在H作用下是稳定的, 由此B也是G-模A的一个H-子模. 设

$$(H,\psi_i) \in M_{\mathcal{O}}(H), \quad i=1,2,$$

我们知道$A^{(H,\psi_i)}$是一个$N_G(H,\psi_i)$-模, 但不是一个$N_G(H,\psi_i)$-代数, 因为

$$A^{(H,\psi_1)}A^{(H,\psi_2)} \subseteq A^{(H,\psi_1,\psi_2)},$$

并且$A^{(H,\psi)}$不总是A的幺$\mathcal{O}$-子代数. 但是, 若$\hat{H}$是$\mathrm{Hom}(H,\mathcal{O}^*)$的$N_G(H)$-子群, 我们设

$$A^{(H,\hat{H})} := \bigoplus_{\psi\in\hat{H}} A^{(H,\psi)},$$

那么按下面的乘法, $A^{(H,\hat{H})}$作成G-代数A的一个$N_G(H)$-子代数,

$$(a_\psi)(b_\phi) = \Big(\sum_{\psi\phi=\theta\in\hat{H}} a_\psi b_\phi\Big)_\theta,$$

$$(a_\psi),(b_\phi) \in A^{(H,\hat{H})}.$$

$H \leqslant G$, $(H,\psi) \in M_{\mathcal{O}}(H)$, 既然G-代数也是一个G-模, 用G-模上的广义迹映射, 我们定义

$$\bar{T}^A_{(H,\psi)} := \sum_{K\lneqq H} A_K^{(H,\psi)} + \pi A^{(H,\psi)},$$

$$\bar{I}_{\hat{H}}^{A} := \bigoplus_{\psi \in \hat{H}} \bar{I}_{(H,\psi)}^{A}.$$

显然,

$$I_{(H,\psi)}^{A} \supseteq \bar{I}_{(H,\psi)}^{A},$$

并且用与文献[28](Lemma 3.3)的证明的类似的过程,我们知道 $N_G(H)$-代数 $\bar{I}_{\hat{H}}^{A}$ 是 $A^{(H,\hat{H})}$ 的双边理想.

现在我们定义下面的广义 Brauer 构造:

$$A(\hat{H}) := A^{(H,\hat{H})}/\bar{I}_{\hat{H}}^{A}.$$

我们称它为 G-代数 A 上的关于 $N_G(H)$-子群 $\hat{H}$ 的广义 Brauer 构造,以及对应的 G-代数 A 上的关于 $N_G(H)$-子群 $\hat{H}$ 的广义 Brauer 构造函子:

$$\mathrm{Br}_{\hat{H}}^{A}: A^{(H,\hat{H})} \longrightarrow A^{(H,\hat{H})}/\bar{I}_{\hat{H}}^{A},$$

$$a \longmapsto a + \bar{I}_{\hat{H}}^{A}: a \in A^{(H,\hat{H})}.$$

显然,k-代数 $A(\hat{H})$ 同时也是一个 $N_G(H)/H$-代数. 我们注意到,如果 $\hat{H} = 1$,上述定义恰是通常的 G-代数上的 Brauer 同态,并且如果

$$\hat{H} = \mathrm{Hom}(H, \mathcal{O}^*),$$

上面的定义也就是文献[28]中的广义 Brauer 构造. 本节中关于 G-代数的广义 Brauer 构造的基本知识介绍,读者可以参考文献[28].

设(A_i, μ_i)是一个 G_i-代数,$i = 1,2$. 在本章中,它们的张量积还是一个有限秩自由 $\mathcal{O}$-代数,从而它们的张量 $G_1 \times G_2$-代数在本章对 G-代数的限量条件下存在,我

们记为

$$(A_1 \otimes_{\mathcal{O}} A_2, \mu_1 \otimes \mu_2).$$

对于任意

$$(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2,$$

而且,如果 B_i 是 A_i 的 H_i- 子代数,$i = 1,2$,那么用 $B_1 \otimes_{\mathcal{O}} B_2$ 我们指的是张量 $G_1 \times G_2$- 模 $A_1 \otimes_{\mathcal{O}} A_2$ 的 $H_1 \times H_2$- 子模,它同时也是 $G_1 \times G_2$- 代数 $A_1 \otimes_{\mathcal{O}} A_2$ 的 $H_1 \times H_2$- 子代数,我们称它为张量 $G_1 \times G_2$- 代数 $A_1 \otimes_{\mathcal{O}} A_2$ 的 $H_1 \times H_2$- 子代数.

引理 5.3.1　设 A_i 是一个 G_i- 代数,$H_i \leqslant G_i$,

$$(H_i, \psi_i) \in M_{\mathcal{O}}(H_i), \quad i = 1,2.$$

那么作为张量 $G_1 \times G_2$- 模 $A_1 \otimes_{\mathcal{O}} A_2$ 的 $N_{G_1 \times G_2}(H_1 \times H_2, \psi_1 \times \psi_2)$- 子模,

$$I^{A_1 \otimes_{\mathcal{O}} A_2}_{(H_1 \times H_2, \psi_1 \times \psi_2)} = I^{A_1}_{(H_1, \psi_1)} \otimes_{\mathcal{O}} A_2^{(H_2, \psi_2)} + A_1^{(H_1, \psi_1)} \otimes_{\mathcal{O}} I^{A_2}_{(H_2, \psi_2)}.$$

证明:类似于引理 5.2.3 的证明.

引理 5.3.2　设 A_i 是一个 G_i- 代数,$H_i \leqslant G_i$,$\hat{H}_i$ 是 $\mathrm{Hom}(G_i, \mathcal{O}^*)$ 的一个 $N_{G_i}(H_i)$- 子群,$i = 1,2$. 那么作为张量 $G_1 \times G_2$- 代数 $A_1 \otimes_{\mathcal{O}} A_2$ 的 $N_{G_1 \times G_2}(H_1 \times H_2)$- 稳定理想,

$$I^{A_1 \otimes_{\mathcal{O}} A_2}_{\hat{H}_1 \times \hat{H}_2} = I^{A_1}_{\hat{H}_1} \otimes_{\mathcal{O}} A_2^{(H_2, \hat{H}_2)} + A_1^{(H_1, \hat{H}_1)} \otimes_{\mathcal{O}} I^{A_2}_{\hat{H}_2}.$$

证明:首先,我们注意到 $\hat{H}_1 \times \hat{H}_2$ 是

$$\mathrm{Hom}(G_1 \times G_2, \mathcal{O}^*)$$

的 $N_{G_1 \times G_2}(H_1 \times H_2)$- 子群.

由引理 5.3.1,作为张量 $G_1 \times G_2$- 模 $A_1 \otimes_{\mathcal{O}} A_2$ 的 $\mathcal{O}$-

子模,我们有

$$
\begin{aligned}
&\bar{I}_{\hat{H}_1}^{A_1} \otimes_k A_2^{(H_2,\hat{H}_2)} + A_1^{(H_1,\hat{H}_1)} \otimes_k \bar{I}_{\hat{H}_2}^{A_2} \\
&= (\oplus_{\psi \in \hat{H}_1} \bar{I}_{(H_1,\psi)}^{A_1}) \otimes_k (\oplus_{\phi \in \hat{H}_2} A_2^{(H_2,\phi)}) \\
&\quad + (\oplus_{\psi \in \hat{H}_1} A_1^{(H_1,\psi)}) \otimes_k (\oplus_{\phi \in \hat{H}_2} \bar{I}_{(H_2,\phi)}^{A_2}) \\
&= \oplus_{(\psi,\phi) \in \hat{H}_1 \times \hat{H}_2} (\bar{I}_{(H_1,\psi)}^{A_1} \otimes_k A_2^{(H_2,\phi)}) \\
&\quad + \oplus_{(\psi,\phi) \in \hat{H}_1 \times \hat{H}_2} (A_1^{(H_1,\psi)} \otimes_k \bar{I}_{(H_2,\phi)}^{A_2}) \\
&= \oplus_{(\psi,\phi) \in \hat{H}_1 \times \hat{H}_2} (\bar{I}_{(H_1,\psi)}^{A_1} \otimes_k A_2^{(H_2,\phi)} + A_1^{(H_1,\psi)} \otimes_k \bar{I}_{(H_2,\phi)}^{A_2}) \\
&= \oplus_{(\psi,\phi) \in \hat{H}_1 \times \hat{H}_2} \bar{I}_{(H_1 \times H_2,\psi \times \phi)}^{A_1 \otimes_k A_2} = \bar{I}_{\hat{H}_1 \times \hat{H}_2}^{A_1 \otimes_k A_2}.
\end{aligned}
$$

既然 $\bar{I}_{\hat{H}_1 \times \hat{H}_2}^{A_1 \otimes_k A_2}$ 和

$$
\bar{I}_{\hat{H}_1}^{A_1} \otimes_k A_2^{(H_2,\hat{H}_2)} + A_1^{(H_1,\hat{H}_1)} \otimes_k \bar{I}_{\hat{H}_2}^{A_2}
$$

都是张量 $G_1 \times G_2$- 代数 $A_1 \otimes_k A_2$ 的 $N_{G_1 \times G_2}(H_1 \times H_2)$- 稳定理想,那么作为张量 $G_1 \times G_2$- 代数 $A_1 \otimes_k A_2$ 的 $N_{G_1 \times G_2}(H_1 \times H_2)$- 稳定理想,

$$
\bar{I}_{\hat{H}_1 \times \hat{H}_2}^{A_1 \otimes_k A_2} = \bar{I}_{\hat{H}_1}^{A_1} \otimes_k A_2^{(H_2,\hat{H}_2)} + A_1^{(H_1,\hat{H}_1)} \otimes_k \bar{I}_{\hat{H}_2}^{A_2}.
$$

定理 5.1.2 的证明:由文献[29](Proposition 2.1),我们知道:

$$
\begin{aligned}
&a_1 \otimes_k a_2 + (\bar{I}_{\hat{H}_1}^{A_1} \otimes_k A_2^{(H_2,\hat{H}_2)} + A_1^{(H_1,\hat{H}_1)} \otimes_k \bar{I}_{\hat{H}_2}^{A_2}) \\
&\qquad \longmapsto (a_1 + \bar{I}_{\hat{H}_1}^{A_1}) \otimes_k (a_2 + \bar{I}_{\hat{H}_2}^{A_2})
\end{aligned}
$$

是一个从

$$
(A_1 \otimes_k A_2)(\hat{H}_1 \times \hat{H}_2)
$$

到

$$
A_1(\hat{H}_1) \otimes_k A_2(\hat{H}_2)
$$

的典范的 k-代数同构，进一步，由引理 5.3.2，以及

$$(A_1 \otimes_{\mathscr{O}} A_2)^{(H_1\times H_2, \hat{H}_1\times \hat{H}_2)}$$

是一个 $N_{G_1\times G_2}(H_1 \times H_2)$-代数，上面的 k-代数同构是一个 $N_{G_1\times G_2}(H_1 \times H_2)$-代数同构，即作为 $(N_{G_1\times G_2}(H_1 \times H_2)/(H_1 \times H_2))$-代数，

$$A_1(\hat{H}_1) \otimes_k A_2(\hat{H}_2) \cong (A_1 \otimes_{\mathscr{O}} A_2)(\hat{H}_1 \times \hat{H}_2).$$

由以上自然映射下的同构式，将

$$\mathrm{Br}_{\hat{H}_1}^{A_1} \otimes_k \mathrm{Br}_{\hat{H}_2}^{A_2}$$

看做是 $N_{G_1\times G_2}(H_1 \times H_2)$-代数

$$(A_1 \otimes_{\mathscr{O}} A_2)^{(H_1\times H_2, \hat{H}_1\times \hat{H}_2)}$$

上的广义 Brauer 构造函子，显然有下面的 Brauer 态射的等同：

$$\mathrm{Br}_{\hat{H}_1}^{A_1} \otimes_k \mathrm{Br}_{\hat{H}_2}^{A_2} = \mathrm{Br}_{(\hat{H}_1\times \hat{H}_2)}^{A_1\otimes_{\mathscr{O}} A_2}.$$

附录一　Brauer 的 43 个问题简述

Brauer, Richard Dagobert, 1901 出生于柏林. 1926 年获博士学位, 毕业后在柯尼斯堡大学任教. 1933 年去美国, 先后在肯塔基大学、普林斯顿高等研究院、多伦多大学、密歇根大学、哈佛大学任教. 1955 年当选为美国国家科学院院士. 1971 年获美国科学功绩奖章. Brauer 是著名代数学家, 他在典型群表示论、有限群模表示论、有限单群、代数数论等方面都做出了重要的贡献. 从 1935 年起, 他通过长期的工作建立起系统而深入的有限群模表示理论. 1954 年他提出的 Brauer 纲领对有限单群分类影响巨大, 他与别人合作证明了一系列重要的分类定理. 他的科学论文汇编为《Brauer 论文集》, 共 3 卷.

1963 年, Brauer 在论文《Representations of Finite Groups》中提出了关于有限群表示论的 43 个重要问题, 这些问题, 有一些已经得到解决, 例如, 我国已故代数学者段学复指导学生用表示论和有限单群分类定理彻底

解决了 Brauer 第 39 问题、第 40 问题，但大部分问题仍然远未解决，其中一些已经成为有限群表示论某些研究方向上的关键问题，例如，Brauer 高零猜想. 我们将它们摘录编译如下：

问题 1：什么样的(有限维结合)代数是群代数?

问题 2：请问，在什么情形下，两个不同构的群可以有同构的群代数?

问题 2′：若群 G_1 和群 G_2 在任意系数域 Ω 上的群代数都同构，那么请问，群 G_1 和群 G_2 同构吗?

问题 3 导语：群的类数是指群的共轭类的个数. Landau 证明了[1]，群的阶 n 有一个只用群的类数 k 来表达的上界. 在 $k \geqslant 3$ 的情形，按他的方法，可知：

$$n \leqslant (2k)^{2^{k-3}}(k-1)^{2^{k-3}}(k-2)^{2^{k-4}}(k-3)^{2^{k-5}}\cdots 5^{2^3}4^{2^2}3^{2}2$$

这意味着，当 n 很大时，k 就不能太小. 既然 Landau 的方法能应用到阶数较小的群上去，因故提出下面的能否有更好的关于群的阶的界的控制问题：

问题 3：对于类数为 k 的有限群 G，请给出 G 的阶的上界，这个上界大体上应该小于 Landau 的方法中的界.

问题 4 导语：设 K 是群的某个共轭类，对于整数 m，记 $K^{(m)}$ 是由 K 中的元素的 m 次幂所构成的群 G 的共轭

① 参见 E.Landau, Math.Ann. 56(1903), 671-676.

类,问题如下:

问题 4:设 G 和 G^* 是两个有限群,若存在群 G 的共轭类集合到群 G^* 的共轭类集合上的一一映射:$K_j \to K_j^*$,以及群 G 的不可约特征标集合到群的不可约特征标集合上的一一映射:$\chi_i \to \chi_i^*$,并且满足:

$$\chi_i(K_j) \to \chi_i^*(K_j).$$

$$(K_j^{[m]})^* \to (K_j^*)^{[m]}.$$

对于所有的整数 m 成立.请问,此时群 G 和群 G^* 同构吗?

问题 5:请研究特征标的值与映射 $K \to K^{[m]}$ 之间的关系.

问题 6:对于一个方阵(它的列上的运算,对应着映射 $K \to K^{[m]}$),请给出它恰是某有限群的特征标表的充分必要条件.

问题 7:请研究 p-群的不可约特征标.

问题 8:给定某 p-群 P,请问,能否找到所有可能的构造方法,它使得群 P 的共轭类在有限群 G 中熔合,并使得群 P 还是群 G 的 Sylow p-子群?

问题 9 导语:设 $K_1, K_2, \cdots, K_k$ 是群 G 的全部共计 k 个共轭类,以及 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 依次是上述各个共轭类的代表元素,记 $C_i = C(\alpha_i)$ 是元素 α_i 在群 G 中的中心化子,并假定 $\alpha_k = 1$,则 $C_k = G$.又设 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 是群 G 的

全部初等子群的共轭代表集，也即，群 G 的每个初等子群都与 $E_1, E_2, \cdots, E_t$ 中的唯一一个初等子群共轭.

问题 9：请问，若有限群 G 的所有的中心化子 C_1，$C_2, \cdots, C_{k-1}$ 已知，或部分已知（可能结合上述提及的与 E_i 相关的类型），那么，我们能获得多少关于群 G 的信息？

问题 10：设有限群 G 的特征标表已知，以及恰好生成群 G 的正规子群 N 的共轭类集合也已知，请问，此时，能否确定群 N 是交换群？

问题 11：给定有限群 G 的特征标表，那么，从中我们能获知多少关于群 G 的子群的存在性问题的信息？

问题 12：设 p 是有限群 G 的阶的素因子，若群 G 的特征标表已知，那么此时，请问，我们能获得多少关于群 G 的 Sylow p-子群 P 的信息？特别地，能否确定群 P 是交换群？

问题 13：请问，若群 G 的特征标已知，我们能从中获得多少关于群 G 的自同构群 $A(G)$ 的信息？

问题 14：请用有限群 G 的理论性质刻画与群 G 在实数域 **R** 上的表示等价并且在复数域 C 上不可约的群 G 的复表示的个数.

问题 15：请用群 G 的理论性质刻画群 G 的根 N 的维数，以及刻画根的幂 $N^2, N^3, \cdots$，特别地，确定最小的幂 e，使得 $N^e = 0$.

问题 16 导语：Higman 证明了下面的结论[1]：

有限群 G 有一个循环 Sylow p-子群当且仅当群 G 在特征为 p 的域 Ω 上的群代数的所有不可分解表示的次数有确定上界.

该结论表明，群结构也可以由群代数的性质来刻画，一般地，问题 16 如下：

问题 16：请给出这样的有限群 G 的类型：它能用群理论的条件来刻画，也能利用群 G 上的群代数的代数理论条件来刻画.

问题 17：设

$$f_i=\varphi_i(1)$$

是阶为 n 的有限群 G 的不可约表示 F_i 的次数，又设 $v_p(\ )$ 是有理数域（或更一般地，全体代数数作成的代数数域）上的离散赋值函数，那么，$v_p(f_i)\leqslant v_p(n)$ 成立吗？特别地，n/f_i 是局部整数吗？（通常，f_i 不能整除群 G 的阶 n）

问题 18：我们知道，对于有限群 G 的每个模不可约特征标 φ_i，都有群 G 的某个常广义特征标 ψ_i，使得 $\psi_i^0=\varphi_i$. 反过来，若 ψ_i 是群 G 的任一常广义特征标，我们如何确定 ψ_i^0 是不是群 G 的模特征标？

问题 19：请用群的理论性质来刻画有限群 G 的亏

① 参见 D.G.Higman，Duke Math.J. 21(1954)，377-381.

零块的个数.

问题 20：请问，论断：有限群 G 的亏为 d 的 p-块 B 至多包含 p^d 个常不可约特征标，是否成立？

问题 21：设 q 是某素数幂，且 $q \geq 2$，请问，能否找到一个函数 $f(q)$，使得 $q \to \infty$ 时，$f(q) \to \infty$，并且对所有的有限群 G，群 G 的亏为 d 的 p-块的不可约特征标的个数至少为 $f(p^d)$？

问题 22：设 φ_i 和 φ_j 都是有限群 G 的亏为 d 的 p-块 B 的模不可约特征标，那么，请问，Cartan 不变量 c_{ij} 至多为 p^d，总成立吗？

问题 23：请问，论断：有限群 G 的块 B 的亏群是交换的当且仅当 B 中的所有不可约特征标的高为 0，正确吗？

问题 24、25 导语：设有限群 G 的阶为 n，p 是 n 的次数为 1 的素数因子，Brauer 在文献[5]中获得了关于这种群的特征标的大量结论，例如：$k(G) \geq k(N)$，这里 $k(G)$ 和 $k(N)$ 分别表示群 G 的类数和群 G 的 Sylow p-子群 P 的正规化子群 $N = N_G(P)$ 的类数.

问题 24：设有限群 G 的阶为 n，n 有次数为 1 的素数因子 p，请直接证明 $k(G) \geq k(N)$，特别地，请确定 $k(G) \geq k(N)$ 中的等号在什么情况下成立.

问题 25：请给出一个关于有限群 G 的类数的不等式，特别地，当该有限群 G 的阶为 n 并且 n 有次数为 1

的素数因子 p 时，该不等式能导出类数不等式 $K(G) \geq K(N)$.

问题 26：设 p 是有限群 G 的阶的素数因子，请问，对于群 G 的 Sylow p-子群的个数 r 的取值问题，我们知晓多少？特别地，当 $G=G'$ 时呢？

问题 27：设 p 是有限群 G 的阶的素数因子，请问，在什么情况下，群 G 的主块 B_0 中除主表示以外的模不可约特征标能在特征为 p 的素数域中写出？

问题 28：我们能否得到关于在群 G 的自同构群 $A(G)$ 的作用下不变的有限群 G 的不可约特征标的相关结论？特别地，在群 G 的阶含有次数为 1 的素数因子 p 的情形下，该结论还要能推导出 Brauer 的相关结论[①].

问题 29：对于给定的素数 p 的幂 p^d，请研究并得到一些关于亏为 d 的 p-块 B 的能帮助限制块 B 的型的可能性的信息.

问题 30：设 P 是一个 2-群，请研究以 P 为 Sylow p-子群的有限群 G，特别地，请研究以 P 为 Sylow p-子群，并且群 G 的某个对合子 j 的中心化子 $C(j)$ 已知的有限群.

问题 31：请问，什么样的 2-群 P，能使得只有有限多个（非同构的）有限群 G 以 P 为 Sylow 2-子群，并使得群

---

① 参见 R.Brauer, Amer.J.Math. 64(1941), 401-420.

G 的 2-正则核 $K_2(G)=\{1\}$（也即，没有非平凡的奇阶正规子群）？这里，群 G 的 2-正则核指的是群 G 的奇数阶极大正规子群.

问题 32：设有限群 G 是 n 阶（非循环）单群，请问，群 G 中是否存在某个对合子 j，使得 $n\leqslant c(j)^3$？这里，$c(j)$ 表示中心化子 $C(j)$ 的阶.

问题 33：请问，什么样的 2-群 P，能使得有限群 G 以 P 为 Sylow 2-子群，并使得 G 只有一个由对合子构成的共轭类？

问题 34：请问，阶恰含有 3 个素数因子的有限单群只有有限多个吗？

问题 35：请问，阶恰含有 4 个素数因子，非 $L_2(q)$ 型的有限单群只有有限多个吗？

问题 36 导语：对于给定单群类 $\mathfrak{S}$ 中的确定维数的单群 F，其阶数 $n(F)$ 可以表达为：

$$n(F)=q^a\cdot\prod_r f_r(q)^{a_r}.$$

这里 $f_r(q)$ 是一个 r 次循环多项式；a、a_r 都是正整数，我们用 $M(\mathfrak{S})-1$ 表示上式中 r 出现的个数，问题 36 如下：

问题 36：给定某个不小于 3 的整数 s，若有限单群 G 的阶恰含有 s 个素数因子，并且群 G 不属于满足 $M(\mathfrak{S})\leqslant s$ 的群类 $\mathfrak{S}$，请问，这样的单群 G 只有有限多个吗？

问题 37：对于某给定的单群类中的有限群 G，请问，是否存在多项式：

$$x_1(q), x_2(q), \cdots, x_t(q),$$
$$n_1(q), n_2(q), \cdots, n_t(q).$$

它们满足：对给定的 q，以及对每个 $i(i=1,2,\cdots,t)$，群 G 恰有 $n_i(q)$ 个次数为 $x_i(q)$ 的不可约特征标 χ_i？

问题 38：对于多项式 $n(q)$，若对于某给定整数集合中的每个整数 q，都存在某个由 q 决定的阶为 $n(q)$ 的群 G_q，请给出一个群理论上的能确保上述启发式论述成立的充分必要条件[1]

问题 39：请问，什么样的阶为 m 的线性群 G，能使得存在素数 $p \geq m+2$，p 整除 m，并且群 G 没有阶为 p 的幂的非平凡正规子群.

问题 40：请确定有限域上的所有的小次数线性群.

问题 41：设 p、q、r 是三个不同的素数，并假定对于有限群 G 的不可约特征标 χ，存在群 G 的元素 α、β、γ，使得 $\chi(\alpha)$、$\chi(\beta)$、$\chi(\gamma)$ 都是无理数，并使得 $\chi(\alpha) \in Q(\sqrt{\pm qr})$，$\chi(\beta) \in Q(\sqrt{\pm pr})$，$\chi(\gamma) \in Q(\sqrt{\pm pq})$，请问，群 G 含有阶为 p、q、r 的元素吗？

问题 42：设 p 是某给定素数，请问，是否存在无限

---

1 这里所说的启发式论述指的是由问题 36 导语中的群阶公式引申的论述，请参见原文.

多个有限群 G,使得群 G 中的某个共轭类代表元 α 在群 G 中的中心化子 $C(\alpha)$ 是 p 阶循环群?

问题 43:能否建立循环亏群的块的理论,该理论在亏群为 p 阶循环群的情形能够统一亏为 1 的块上的所有已知结论?

附录二　局部-整体猜想简介

人类从自然界中发现和认识了对称,对称性问题是人类生产生活中最古老的问题之一.群就是我们用来刻画对称的数学概念,是数学家头脑中的对称.

然而,数学家花了两千多年才找到群的准确的数学定义,现在的抽象群的概念是由 Cayley 首先给出的,之后,置换群概念出现在对代数方程的根的研究中.

群论,从本质上说,是研究数学和物理学系统的对称性的理论,它对数学各领域的影响深远.有限群表示论,是群论的重要领域,它有许多深刻而又艰深的公开难题,直到今天,这些难题中的大部分还远未解决,例如,本书附录一中的关于有限群表示论的 43 个问题.

在 20 世纪七八十年代,陆续出现了一些与有限群的局部与整体性质密切相关的深刻问题,这些问题在群的局部分析和局部表示论中成为了需要检查的关键问题,如:Broue' 交换亏群猜想、Alperin-Mckay 猜想、Alperin 权猜想、Brauer 高零猜想,它们被称为有限群表示

论中的局部-整体猜想.这些猜想,虽然仍未解决,但在有限单群分类完成以后,借助单群分类的成果,通过将这些猜想约化到单群情形,在近些年都取得了重大进展.

下面我们简述这些猜想及其近年来的若干进展简况.

Broue'交换亏群猜想

Broue'交换亏群猜想:设 G 是一个有限群,B 是群 G 的亏群为 D 的块. 又设 b 是块 B 在群 $N_G(D)$ 中的 Brauer对应,若 D 是交换群,那么,块 B 与块 b 是导等价的.

这里,块 B 和块 b 之间的导等价是指:块(代数)B 上的导出范畴 $D(B)$ 与块(代数)b 上的导出范畴 $D(b)$ 是等价的.

Broue'交换亏群猜想与亏群交换的块的结构密切相关.例如,若块 B 与块 b 导等价,我们可知块 B 和块 b 上的常不可约特征标的个数是一样多的,它们的模不可约特征标的个数也是一样多的,不仅如此,我们还能获得许多关于块 B 和块 b 的共同性质.

目前,Broue'交换亏群猜想已经在亏群循环情形、p-可解群情形、$C_2\times C_2$ 情形、$C_3\times C_3$ 情形、对称群情形、交

错群情形以及其他情形中得到了证实.

应用 Tilting 复形技术, Rickard 证明了: 对于群 G 中亏群 D 交换的块 B, 块(代数) B 与群 D 在群 $(N_G(D)/C_G(D))$ 作用下的半直积的群代数是导等价的. Linckelmann 提升了该 Tilting 复形到局部环情形, 并进而证明了亏群循环的块情形下的 Broue'交换亏群猜想.

Dade 证明了 p-可解群中的 Brauer 对应下的块代数 B 和 b 是 Morita 等价的, Harris 和 Linckelmann 进一步证明了该等价可以诱导出一个与 Splendid 型导等价同构的导等价, 从而在 p-可解群情形下证明了 Broue'交换亏群猜想.

对于亏群为 $D=C_2\times C_2$ 的块代数 B, Erdmann 和 Linckelmann 证明了它的源代数在同构意义下只有下面的三种可能:

$$\Omega_D^n(RA_4),\Omega_D^n(B_0(RA_5)),\Omega_D^n(RD).$$

利用块的源代数与块代数是 Morita 等价的, 以及所有的 Heller 变换也是 Morita 等价的, 那么此时, 块代数在 Morita 等价意义下, 只有下列三种形式:

$$RA_4,B_0(RA_5),RD.$$

而 Rickard 又证明了 RA_4 和 $B_0(RA_5)$ 是导等价的, 所以块代数与 RA_4 或 RD 是导等价的, 从而在亏群为 $D=C_2\times C_2$ 情形下证明了 Broue'交换亏群猜想.

当群 G 的亏群是 $D=C_3\times C_3$ 时，Koshitani 和 Kunugi 先是将问题约化到 $O_{3'}(G)=1$ 的情形，进而借用 Yoshiara 所证明的结论：Sylow 3-子群为 9 阶初等交换 3-群（$O_{3'}(G)=1$）的有限群要么是单群，要么可表达为两个单群的直积形式．以及利用单群分类定理，逐一检验了所有可能的情形，最终验证了 Broue′交换亏群猜想在亏群 $D=C_3\times C_3$ 情形成立．

当群 G 是对称群时，Chuang 和 Rouquier 给出了许多关于群 G 的块的结构的结论，从中可得知 Broue′交换亏群猜想在对称群情形下的块上成立．Marcus 应用这个结论，并结合 Clifford 定理，证明了 Broue′交换亏群猜想对交错群的块也成立．

Tilting 复形技术不仅成功地应用于循环亏群情形下的 Broue′交换亏群猜想的证明，它还更多地是用在特殊群情形下的 Broue′交换亏群猜想的验证上，例如，Gollan 和 Okuyama 应用这个技术验证了 Broue′交换亏群猜想在群 $J_1(p=2)$ 的亏群为 C_2^3 的块上成立．

Broue′交换亏群猜想在李型单群情形下也取得进展，例如，Landrock 和 Michler 证明了 Ree 群 $^2G_2(3^{2n+1})$ 的主块都是 Morita 等价的，从而约化 Broue′交换亏群猜想到 $^2G_2(3)$ 情形，而在该情形下，Broue′交换亏群猜想是成立的，由此，在此情形下证明了 Broue′交换亏群猜想．

Alperin-Mckay 猜想

Alperin-Mckay 猜想：设 B 是有限群 G 的块，群 D 是块 B 的亏群，b 是块 B 在 $N_G(D)$ 中的 Brauer 对应，则 $k_0(B)=k_0(b)$.

Alperin-Mckay 猜想是说，Brauer 对应下的块的高为零的常不可约特征标个数是一样多的. Alperin-Mckay 猜想首次出现在 Mckay 的论文中，现在的形式是 Alperin 在 1976 年的论文中给出的.

2007 年，Isaacs、Malle、Navarro 在 Alperin-Mckay 猜想上获得了一个重要进展，他们将该猜想约化到单群的问题上，获得了约化 Alperin-Mckay 条件，后来，依靠 Deligne-Lusztig 理论，Malle 和 Späth 在多个单群类上验证了该猜想，再后来，Feng 和 Srinivasan 试图利用约化到可约群上去验证 Alperin-Macky 猜想，最近，Cabanes 和 Späth 又在某些李型单群类上验证了约化 Alperin-Mckay 条件.

Alperin 权猜想

Alperin 权猜想：设 G 是一个有限群，那么：

$$l(G)=\sum_{P\in\wp}f(N_G(P)/P)$$

这里,$l(G)$表示群 G 上的单模同构类的个数,$f_0(N_G(P)/P)$表示群 $N_G(P)/P$ 上的投射单模同构类的个数,$\wp$表示群 G 的全体 p-子群集合的共轭类的一个代表类.

近年来,Alperin 权猜想的证明也取得了较大进展,Okuyama 在 p-可解群上证明了 Alperin 权猜想,利用单群分类定理,Blau 和 Michler 证明了在具有 T.I. Sylow p-子群的有限群上 Alperin-Macky 猜想和 Alperin 权猜想都成立,以及下面的 Brauer 高零猜想也成立.

2011 年,Navarro 和 Tiep 将 Alperin 权猜想约化到单群的相关问题上,得到约化 Alperin 权猜想条件(约化 AWC 条件),Puig 也将该猜想约化到单群上,并且,Navarro、Tiep、Malle、An、Dietrich 已经在多个类型的单群上证明了该约化条件,最近,Koshitani 和 Späth 在循环亏群的块上验证了该约化条件.

Brauer 高零猜想

Brauer 高零猜想:设 B 是有限群 G 的亏为 d 的块,那么 $k(B)=k_0(B)$ 当且仅当块 B 的亏群是交换的,也即,只有亏群交换的块中的所有不可约特征标都是高为 0 的特征标.

Brauer 高零猜想是 1955 由 Brauer 提出的有限群的块理论中的基础性的问题，它与群表示论中关于特征标的许多结论密切相关.

p-可解群情形下的 Brauer 高零猜想已经由 Gluck 和 Wolf 证明了. 近年来，Brauer 高零猜想的证明也取得了突破性进展，Narro 和 Tiep 证明了有极大亏的 2-块情形下的 Brauer 高零猜想，Kessar 和 Malle 借用 Berger-knörr 约化证明了该猜想的充分性部分，以及在拟单群情形下的必要性部分，2012 年 Navarro 和 Späth 证明了约化 Brauer 高零猜想必要性的证明到 Alperin-Mckay 猜想的约化 Alperin-Mckay 条件，从而 Alperin-Mckay 猜想的突破将可能带来 Brauer 高零猜想的最终解决.

参考文献

[1] 徐明耀.有限群导引(上、下册).北京:科学出版社,1987.

[2] 张广祥.有限群模表示论.重庆:西南师范大学出版社,1993.

[3] 张继平.新世纪代数学.北京:北京大学出版社,2002.

[4] A. Aglhamdi, A. Khammash. Defect Groups of Tensor Modules. J. Pure Appl. Algebra, 2002, 167: 165-173.

[5] J. Alperin. Local Representation Theory. Cambridge Univ. Press, 1986.

[6] J. Alperin. The Green Correspondence and Normal Subgroups. J. Algebra, 1986, 104: 74-77.

[7] J. Alperin, D. Burry. Block Theory with Modules. J. Algebra, 1980, 65: 225-233.

[8] J. Alperin, M. Broue. Local Methods in Block Theory. Ann. of Math., 1979, 110: 143-157.

[9] L. Barker. Block of Endomorphism Algebras. J. Algebra,

1994,168:728-740.

[10] D. Benson. Representations and Cohomology, Vol. I, Cambridge Students in Advanced Mathematics 30. Cambridge University Press,1991.

[11] R. Boltje, B. Kulshammer. A Generalized Brauer Construction and Linear Source Modules. Tran. of A. M. S.,2000,352(7):3411-3428.

[12] R. Boltje, B. Xu. On p-permutation Equivalence: between Rickard Equivalences and Isotypies. to appear in Tran.of A.M.S.

[13] R. Boltje. Linear Source Modules and Trivial Source Modules. Proc. Sympos. Pure Math.,1998,63:7-30.

[14] R. Boltje, B. Kulshammer. Monomial Resolutions of Trivial Source Modules. J. Algebra, 2002, 248: 146-201.

[15] R. Brauer. Zur Darstellungstheorie der Druppen Ordnung. Math.Z.,1959,72:25-46.

[16] M. Broue. On the Scott Modules and p-permutation Modules: An Approach through the Brauer Morphism. Proc.of A.M.S.,1985,93:401-408.

[17] M. Broue. Brauer Coefficients of p-subgroups Associated with A P-block of A Finite Group, J. Algebra, 1979,56:365-383.

[18] M.Broue.L.Puig.Characters and local Structures in *G*-algebras.J.Algebra,1980,63:306-317.

[19] D. Burry, J. Carlson. Restriction of Modules to local Subgroups.Proc.of A.M.S.,1982,84(2):181-184.

[20] M. Collins. Blocks, Normal Subgroups, and Brauer's Third Main Theory.J.Algebra,1999,213:69-76.

[21] W. Curtis. Methods of Representation Theory—with Applications to Finite Groups and Orders.New York, Wiley,1987.

[22] W. Curtis. Methods of Representation Theory—with Applications to Finite Groups and Orders.New York, Wiley,1981.

[23] Y. Fan, Local Characterizations of Block Covers and Their Applications. J. Algebra, 1992, 152(2): 397-416.

[24] Y. Fan. Block Covers and Module Covers of Finite Groups.Group Theory,1987:357-366.

[25] J. Green. On the Brauer Homomorphism. J. London Math.Soc.1978,17(2):58-66.

[26] J. Green. Some Remark on Defect Groups. Math. Z., 1968,107:135-150.

[27] J. Green. A Theorem on Modular Endomorphism Rings.Illin.J.Math.,1998,32(3):510-519.

[28] R. Hartmann. Endo-monomial Modules over p-groups and Their Classification in the Abelian Case. J. Algebra, 2004, 274: 564-586.

[29] M. Harris. Some Remarks on the Tensor Product of Algebras and Applications. J. Pure Appl. Algebra, 2005, 197: 1-9.

[30] M. Harris, R. Knorr. Brauer Correspondence for Covering Blocks of Finite Groups. Comm in Algebra, 1985, 13: 1213-1218.

[31] M. Harris. A Note on Projective Indecomposable Characters of Quotient Groups. Bulletino U. M. I. 1983, 62-A: 241-244.

[32] G. Huang. On Interior G-algebras. Chin. Ann. of Math. Ser. B., 1991 12: 335-347.

[33] W. Huang. On the Cover Relationship for the Local Interior G-algebras. Accepted by Fund. Appl. Math.

[34] W. Huang. On the Blocks of the Centralizer of G-fixed Points Subalgebra of the Interior G-algebra. Accepted by Comm in Algebra.

[35] W. Huang. Tensor Products and local Interior G-alagebras. Extracta Mathematicae, 2006, 21(3): 211-220.

[36] W. Huang. Some Results on the Generalized Inflated G-algebras. Preprint.

[37] W. Huang., Tensor Products of the Generalized Brauer Constructions for *G*-modules and *G*-albebras. Accepted by Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

[38] B. Huppert, W. Willems. Bemerkungen zur Modularen Darstellungtellungtheorie Ⅱ, Darste-llungen von Normalteilern, Arch. Math. (Basel), 1975, 26: 486-496.

[39] B. Huppert, N. Blacburn. Finite Groups Ⅱ. Springer, Berlin, 1982.

[40] T. Ikeda. Some Properties of Interior *G*-algebras. Hokkaido Math. J., 1986 15: 453-467.

[41] T. Ikeda. On the Defect Groups of Interior *G*-algebras and Vertices of Modules. Hokkaido Math. J., 1990, 19: 447-460.

[42] I. Issacs. Character Theory of Finite Groups. Academic Press, 1976.

[43] I. Isaacs, L. Scott. Blocks and Subgroups. J. Algebra, 1972, 20: 630-636.

[44] G. Karpilovsky. Symmetric and *G*-algebras—with applications to Group Representations. Mathematics and its applications 60, Kluwer Academic Publishers, 1990.

[45] G. Karpilovsky. Group Representations. North-Holland

Mathematics Studies 175, Elsevier Science B. V., 1992.

[46] G.Karpilovsky.Induced Modules over Group Algebras. North-Holland Mathematices Studies 161, Elsevier Science B.V.,1990.

[47] G. Karpilovsky. Group Representations. North-Holland Mathematics Studies 180, Elsevier Science B. V., 1994.

[48] G. Karpilovsky. Group Representations. North-Holland Mathematics Studies 183, Elsevier Science B. V., 1996.

[49] R. Knorr. Blocks, Vertices and Normal Subgroups. Math.Z.,1976,148:55-60.

[50] B. Kulshammer. Some Remarks on Indecomposable Modules.J.pure.appl.Algebra,1993,86:65-73.

[51] B. Kulshammer. Lectures on Block Theory. LMSLNS 161,Cambridge University Press,1991.

[52] P. Landrock. Finite Group Algebras and Their Modules.LMSLNS 84,Cambridge University Press,1983.

[53] M.Muri.Blocks of Factor Groups and Heights of Characters.Osaka J.Math.,1998,35:835-854.

[54] M.Muri.Normal Subgroups and Heights of Characters. J.Math.Kyoto Univ.,1996,36:31-43.

[55] H.Nagao.A Proof of Brauer's Theorem on Generalized Decomposition Numbers, Nagaoya Math.J., 1963, 22: 73-77.

[56] H. Nagao, Y. Tsushima. Representations of Finite Groups.Academic Press, INC, 1989.

[57] T.Okyuama.A Note on Brauer Correspondence.Proc. Japan.Acad., 1978, 54: 27-28.

[58] J. Olsson. On Subpairs and Modular Representaion Theory.J.Algebra, 1982, 76: 261-279.

[59] D.Passman.Blocks and Normal Subgroups.J.Algebra, 1969, 12: 569-575.

[60] L.Puig.Pointed Groups and Construction of Modules. J.Algebra, 1988, 116: 7-129.

[61] L.Puig.Pointed Groups and Construction of Characters.Math.Z., 1981, 176: 265-292.

[62] L.Puig.Nilpotent Blocks and Their Source Algebras. Invent.Math., 1988, 93: 77-116.

[63] B.Puttaswamaiah, J.Dixon.Modular Representations of Finite Groups, Academic Press, 1977.

[64] R. Rouquier. Gluing p-permutation Modules. http://www.maths.abdn.ac.uk/bensondj/html/archive/rouquier.html.

[65] J. Serre. Linear Representations of Finite Groups.

Springer-Verlag, 1977.

[66] J. Thévenaz. *G*-algebras and Modular Representation Theory. Oxford Clarendon Press, 1995.

[67] A. Watanabe. Relations between Blocks of A Finite Group and Its Subgroup. J. Algebra, 1982, 78: 282-291.